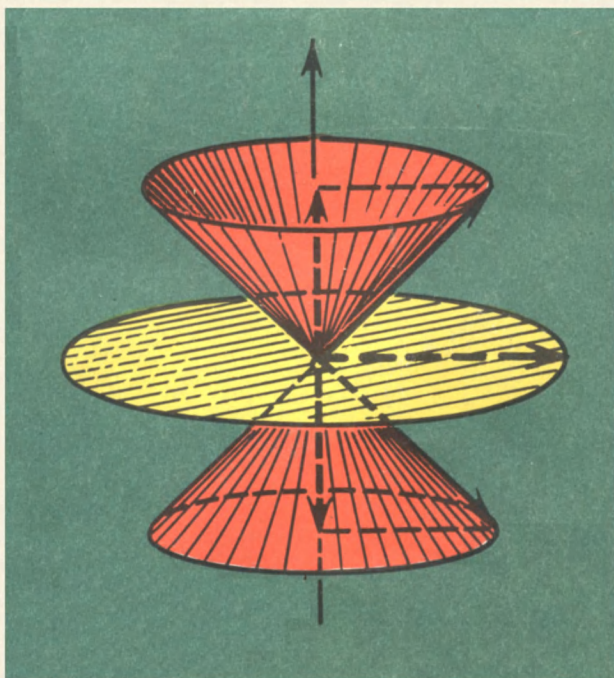




БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •
выпуск 16

М. И. КАГАНОВ
В. М. ЦУКЕРНИК

ПРИРОДА МАГНЕТИЗМА





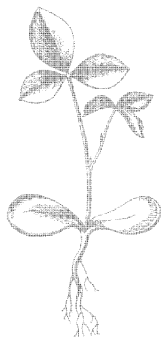
БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •
выпуск 16

М. И. КАГАНОВ
В. М. ЦУКЕРНИК

ПРИРОДА МАГНЕТИЗМА



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982



Scan AAW

22.33

К 12

УДК 539

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Академик **И. К. Кикоин** (председатель), академик **А. Н. Колмогоров** (заместитель председателя), доктор физ.-мат. наук **Л. Г. Асламазов** (ученый секретарь), член-корреспондент АН СССР **А. А. Абрикосов**, академик **Б. К. Вайнштейн**, заслуженный учитель РСФСР **Б. В. Воздвиженский**, академик **В. М. Глушков**, академик **П. Л. Капица**, профессор **С. П. Капица**, академик **Ю. А. Осипьян**, член-корреспондент АПН РСФСР **В. Г. Разумовский**, академик **Р. З. Сагдеев**, кандидат хим. наук **М. Л. Смолянский**, профессор **Я. А. Смородинский**, академик **С. Л. Соболев**, член-корреспондент АН СССР **Д. К. Фаддеев**, член-корреспондент АН СССР **И. С. Шкловский**.

Каганов М. И., Цукерник В. М.

К12 Природа магнетизма. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982, — 192 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 16) — 30 коп.

Хотя магниты и были открыты на заре цивилизации, понимание природы магнетизма пришло только после создания квантовой механики. В книге понятным для учеников старших классов языком объяснено, почему встречаются тела с различными магнитными свойствами, что такое ферро- и антиферромагнетик, за счет каких сил магнитные моменты атомов выстраиваются в определенном порядке. Описаны способы изучения магнитных структур.

Для школьников, преподавателей, студентов.

К 1704040000-048
053 (02)-82 **КБ-9-39—82**

ББК 22.33
537

Моисей Исаакович Каганов, Виктор Моисеевич Цукерник

ПРИРОДА МАГНЕТИЗМА

(Серия: «Библиотечка «Квант»)

Редактор **И. Г. Вирко**.

Технический редактор **С. Я. Шкляр**. Корректор **Е. В. Сидоркина**.

ИБ 11911

Сдано в набор 03.08.81. Подписано к печати 10.03.82. Т-00395. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага тип. № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 10,08. Уч.-изд. л. 9,83. Тираж 150 000 экз. Заказ № 230. Цена 30 коп.

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Набрано и сматрицировано в ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградском производственно-техническом объединении «Печатный двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

Отпечатано в Ленинградской типографии № 2 головном предприятии ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

К 1704040000—048
053(02)-82 **КБ-9-39—82**

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, 1982

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ. О ЧЕМ ЭТА КНИГА?	5
Г л а в а 1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МАГНИТЫ	14
§ 1. Электрические и магнитные диполи	14
§ 2. Гиромангнитное отношение	19
§ 3. Существуют ли элементарные источники магнитного поля? Гипотеза Ампера	20
§ 4. Немного о квантовой механике Соотношения неопределенностей. Частицы — волны (25). Стационарные состояния (28). Еще раз об атоме водорода (31).	24
§ 5. Момент количества движения. Пространственное квантование	32
§ 6. Магнитный момент в магнитном поле	36
§ 7. Спин и собственный магнитный момент электрона	39
§ 8. g -фактор	44
§ 9. Строение атомов Принцип запрета Паули (55)	49
§ 10. Обменная энергия	60
Г л а в а 2. ПАРАМАГНЕТИЗМ И ДИАМАГНЕТИЗМ	65
§ 1. Магнитная восприимчивость	65
§ 2. Магнитное поле выстраивает магнитные моменты Отрицательные абсолютные температуры (73). Электронный парамагнитный резонанс (77).	70
§ 3. Диамагнетизм Магнетизм — квантовое явление (84).	79
§ 4. Металлы. Парамагнетизм Паули Ферми- и бозе-газы (87).	86
§ 5. Металлы. Диамагнетизм Ландау	93
§ 6. Сверхпроводники — идеальные диамагнетики	95
Г л а в а 3. ФЕРРОМАГНЕТИЗМ	99
§ 1. Атомные магнетики упорядочивают сами себя	100
§ 2. Ферромагнетизм — результат действия обменных сил Ферромагнитные металлы (111).	107
§ 3. Переход «пара — ферро» — один из фазовых переходов 2-го рода	112
§ 4. Куда направлен магнитный момент ферромагнетика? Энергия магнитной анизотропии	117

§ 5.	Домены	123
§ 6.	Техническая кривая намагничивания	130
§ 7.	Спиновые волны Спиновые комплексы (144).	135
§ 8.	Спиновые волны как волны неоднородной прецессии	148
§ 9.	Газ магнонов Бозе-газ (152). Квантовый осциллятор (155).	151
§ 10.	Намагниченность и теплоемкость ферромагнетика при низких температурах Фононы (161).	158
Г л а в а	4. АНТИФЕРРОМАГНЕТИЗМ	166
§ 1.	Антиферромагнитное упорядочение	167
§ 2.	Магнитное поле изменяет структуру антиферромагнетика	172
§ 3.	Спиновые волны — магноны в антиферромагнетике	178
§ 4.	Как «увидеть» отдельный магнон? Ферромагнитный резонанс (185). Ферроакустический резонанс (189), Неупругое рассеяние (190).	183

Название книги довольно точно обозначает ее тему. Мы постараемся рассказать о природе магнетизма.

Существует большой раздел физики — физика электромагнитных явлений. К началу XX века казалось, что трудами Фарадея и Максвелла она завершена. Завершена в том смысле, что поняты основные законы, которые управляют электромагнитными полями, т. е. написаны соответствующие уравнения, а задача будущих поколений — искать все более вычурные решения этих уравнений. Постепенно стало ясно: ни о какой завершенности не может идти речь. Теория электромагнитных явлений, как и механика, претерпела существенное развитие благодаря привнесению в них квантовых идей. Теперь мы осторожнее в своих суждениях о завершенности того или другого раздела физики. Всякая достаточно развившаяся наука формулирует не только основные принципы, на которых она строится, но и границы применимости этих принципов. Квантовую механику *) и теорию электромагнетизма, которые лежат в основе понимания строения и свойств окружающей нас природы, можно применять к исследованию огромной совокупности явлений, если не углубляться в субатомные структуры. Сомневаться в надежности известных нам законов физики при этом нет оснований: мы находимся в границах их применимости.

Основное понятие физики электромагнитных явлений — электромагнитное поле. Постоянное, не зависящее от времени электромагнитное поле распадается на два поля: электрическое и магнитное. Они очень непохожи. И все же, зависящее от времени электромагнит-

*) Мы рекомендуем читателям книгу А. С. Компанейца «Что такое квантовая механика?» — М.: Наука, 1977. Она может служить прекрасным введением к «Природе магнетизма».

ное поле есть единство электрического и магнитного полей. В электромагнитной волне энергия сосредоточена то в электрическом поле, то в магнитном, как при колебании маятника, энергия которого перераспределяется между потенциальной и кинетической.

Электромагнитное поле доступно органам чувств человека только в том случае, если электрическое и магнитное поля колеблются с огромной частотой. Если частота колебаний электромагнитного поля лежит в интервале от $4 \cdot 10^{14}$ до $7,5 \cdot 10^{14}$ Гц, то эти колебания мы воспринимаем как свет. На шкале частот видимое электромагнитное поле занимает незначительный участок. Но невозможно себе представить, что было бы, если бы этого участка не су-

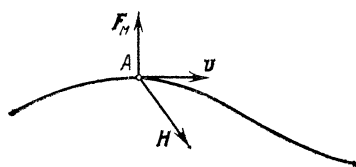


Рис. 1. Сила Лоренца F_M , действующая на заряд $q < 0$ в точке A траектории, v — скорость частицы, H — магнитное поле.

ществовало, ведь большую часть сведений об окружающем мире мы получаем с помощью зрения. «Лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать», — правда этой народной мудрости может быть подкреплена современными расчетами теории информации.

Статические поля (и электрическое, и магнитное) вовсе не ощущаются человеком — у него для этого нет органа. Кажется, перелетные птицы чувствуют магнитное поле, но даже если это так, мы не имеем возможности представить себе, что они ощущают. Но, конечно, отсутствие у человека органа, воспринимающего электрическое и магнитное поля, не лишает нас возможности выяснить, есть ли в данной точке пространства поле или нет. И не только обнаружить поле, но и измерить его. Обнаружить и измерить электрическое и магнитное поля нам помогают приборы. Несмотря на огромное разнообразие используемых приборов, большинство *) из них основано на следующем физическом факте: если в данной точке пространства электрическое поле отличается от нуля и равно E , то на заряд величины q действует сила $F_{эл}$, равная qE ; если же отлично от нуля магнит-

*) Мы написали «большинство», а не «все», так как есть методы измерения магнитных полей, основанные на взаимодействии магнитного поля с атомными и субатомными магнитными моментами (см. ниже), а не с зарядами.

ное поле H , то на движущийся со скоростью v заряд q действует сила F_m , равная $\frac{q}{c} [vH]$, где c — скорость света в вакууме, равная $3 \cdot 10^{10}$ см/с (рис. 1). Наконец, если и электрическое, и магнитное поля оба не равны нулю, то сила, действующая на заряд q , есть

$$F = F_{эл} + F_m = q \left(E + \frac{1}{c} [vH] \right). \quad (1)$$

Эта сила носит название *силы Лоренца*.

Буквы E , H , F , v напечатаны жирным шрифтом.

Это означает, что величины, которые ими обозначены, суть векторы.

Подчеркнем еще раз: электрическое и магнитное поля — векторы. Такова их природа. Это было понято и легло в основу описания электромагнитного поля, завершившись формулировкой знаменитых уравнений Максвелла. Уравнения эти столь знамениты, а точнее, столь важны, что создание их справедливо считается важнейшим историческим событием.

Создать и электрическое, и магнитное поле просто. Электрическое поле заполняет пространство между обкладками заряженного конденсатора (рис. 2), а магнитное окружает провод, по которому течет ток (рис. 3).

Изображают векторные поля с помощью силовых линий, плотность которых тем

больше, чем больше величина поля, а направление совпадает с направлением вектора (рис. 4).

Из учебника физики мы воспроизвели рисунок (см. рис. 4, а), показывающий, что заряд (на рисунке — шарик небольшого радиуса) есть источник электрического поля. Если заряд положителен, то силовые линии

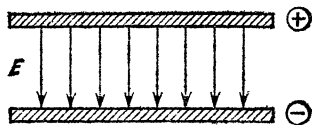


Рис. 2. Силовые линии электрического поля между обкладками плоского конденсатора.

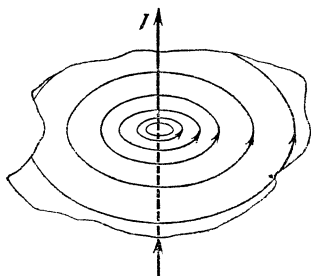


Рис. 3. Магнитное поле вокруг прямолинейного проводника с током I . Магнитные силовые линии изображены на плоскости.

электрического поля выходят из шарика — уходят на бесконечность, постепенно разрежаясь. Если заряд отрицателен (см. рис. 4, б), то силовые линии входят в заряд. Эти рисунки очень важны. Комбинируя их, можно понять, какова структура статического электрического поля во всех практически важных случаях.

Специальный раздел теории электромагнетизма — электростатика — занимается изучением статического электрического поля, его распределением в пространстве, проникновением в вещества различной природы. В основе электростатики лежит факт, нашедший графическое

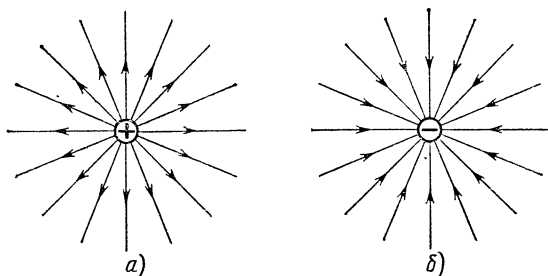


Рис. 4. Силовые линии электрического поля неподвижного точечного заряда q : а) $q > 0$; б) $q < 0$.

выражение на рис. 4, а, б: источники электрического поля — электрические заряды.

Обычно для демонстрации распределения электрического поля вокруг заряда используют маленький, но вполне макроскопический (т. е. состоящий из миллиардов атомов) шарик. Расчет и многократные экспериментальные проверки показывают, что напряженность электрического поля падает при удалении от заряда q обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда (закон Кулона)*)

$$E = \frac{q}{r^2}. \quad (2)$$

*) Вы, наверное, привыкли к несколько другой формулировке закона Кулона: сила взаимодействия $F_{\text{кул}}$ между двумя зарядами q_1 и q_2 обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F_{\text{кул}} = \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Если заряды имеют одинаковый знак, они притягиваются, если разный — отталкиваются,

Удивительно, что этот закон действует не только в макро-, но и в микромире. Резерфорд, исследуя рассеяние α -частиц в веществе, установил, что атомное ядро (одно ядро!) создает вокруг себя электрическое поле, подчиняющееся закону Кулона (2). Обычно, рассказывая об опытах Резерфорда, подчеркивают тот факт, что этими опытами было открыто атомное ядро — положительно заряженный сгусток вещества, в сто тысяч раз меньший атома. Конечно, это — главный результат. Но не менее важен и факт проверки закона Кулона вплоть до расстояний порядка 10^{-13} см. Вдумайтесь: простой закон обратной пропорциональности квадрату расстояния действует и на расстояниях, соизмеримых с человеческими масштабами (сантиметры, метры), и на расстояниях 10^{-13} см. А если добавить, что нет оснований сомневаться в справедливости формулы (2) при увеличении расстояний до, скажем, космических, то универсальность закона Кулона совершенно потрясает.

Закону Кулона можно придать несколько другую форму, сказав, что потенциальная энергия U заряда q_2 отлична от нуля и равна $q_1 q_2 / r$, если в начале координат имеется заряд q_1 . Энергию можно определять с точностью до постоянного слагаемого. Здесь постоянное слагаемое выбрано так, чтобы на бесконечном расстоянии от заряда q_1 (при $r \rightarrow \infty$) $U = 0$. Тогда знак потенциальной энергии U определяет, имеем мы дело с притяжением ($U < 0$), или с отталкиванием ($U > 0$).

«Энергетическая» форма закона Кулона чаще используется в атомной физике, чем «силовая».

Исследования атомной структуры вещества обнаружили микроскопические источники электрических полей в природе. Ими оказались электроны и протоны. Их заряды равны по величине и противоположны по знаку. Принято считать, что заряд протона e_p положителен, а электрона e — отрицателен:

$$e_p = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ г}^{1/2} \text{ см}^{3/2} \text{ с}^{-1} = -e. \quad (3)$$

Подчеркнем: электрон и протон имеют не просто микроскопические, т. е. маленькие, заряды, а наименьшие — элементарные. В природе не обнаружены частицы с дробным электрическим зарядом (в единицах e *).

*) В последнее время много говорят и пишут о кварках — частицах, из которых состоят нуклоны: протоны и нейтроны. Их

Велик заряд электрона (протона) или мал? Физика не допускает такой абстрактной постановки вопроса. Всегда надо добавить: «по сравнению с чем». Если рассматривать заряд как меру взаимодействия между частицами, то он огромен. Действительно, сравним силу отталкивания между двумя протонами, обязанную закону Кулона

$$F_{\text{кул}} = -\frac{e_p^2}{r^2},$$

с силой притяжения, обязанной закону всемирного тяготения

$$F_{\text{гр}} = \gamma \frac{m_p^2}{r^2}.$$

Это сравнение легко провести, так как и та, и другая сила убывают по одинаковому закону — обратно пропорционально квадрату расстояния между частицами. Масса протона $m_p = 1,7 \cdot 10^{-24}$ г, а постоянная γ в законе всемирного тяготения равна *) $6,7 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$. Отношение $F_{\text{кул}}/F_{\text{гр}} \approx 4 \cdot 10^{42}$. Более чем в 10^{42} (!) раз электрические силы больше гравитационных. Именно поэтому о гравитационных силах попросту не думают, когда решают проблемы атомной физики.

Почему же, если электрические силы так велики, с ними не приходится считаться в быту, в технике?

Дело в том, что в окружающей нас среде очень много свободных зарядов (электронов, ионов). Чуть где возникнет заряд, свободные заряды соответствующего знака притянутся и его нейтрализуют. В большинстве случаев мы имеем дело с нейтральными (незаряженными) телами. Силы же гравитации нейтрализовать нельзя. Они растут с ростом массы и для макроскопических тел, а особенно космических, именно они наиболее существенны.

Но роль заряда не сводится к описанию взаимодействия между заряженными частицами. Наверное, все

несколько сортов с зарядами $\pm \frac{1}{3}e$ и $\pm \frac{2}{3}e$. Однако, по-видимому, в свободном состоянии (не в составе нуклонов) они не могут существовать — это им почему-то запрещено!

*) *Задача.* Вычислите γ , воспользовавшись значением ускорения силы тяжести на Земле, равным $\approx 9,8 \text{ м/с}^2$, и данными о нашей планете (возьмите их из справочника или из энциклопедии),

знают, что заряженная частица в определенных условиях излучает электромагнитные волны. Именно *заряженная* частица, а не нейтральная. Мерой способности излучать служит заряд, точнее, безразмерное отношение $e^2/\hbar c$ (в это вам придется поверить). Здесь \hbar — знаменитая постоянная Планка, без которой не обходится ни одна формула квантовой физики. Величина $\hbar \approx 10^{-27}$ г·см²·с⁻¹, так что отношение $e^2/\hbar c \approx 1/137$. Его часто так и называют: «одна сто тридцать седьмая» *). То, что $e^2/\hbar c \ll 1$, показывает, что электронный заряд в определенном смысле мал. Итак, в одном смысле велик, а в другом — мал. Ничего не поделаешь — так устроен мир.

Обратимся теперь к магнитному полю.

Магнитные заряды в природе не обнаружены.

В 1931 г. один из создателей квантовой механики, Дирак, высказал убеждение, что магнитные заряды в природе должны быть. Он назвал их *монополями*. Мир был бы более симметричным, теория электромагнетизма более красивой, если бы монополи были. Много усилий потратили ученые на поиски монополя. Несколько раз появлялись сенсационные сообщения об их открытии, которые в дальнейшем опровергались. Монополь обнаружен не был.

Но микроскопические источники магнитного поля в природе есть. Мы подробно расскажем о них в одной из первых глав.

Теперь мы можем кратко рассказать, о чем написано в этой книге.

Во-первых, как мы только что сказали, о микроскопических источниках магнитного поля.

Во-вторых, объяснив, что микроскопическими источниками магнитного поля (как и электрического) служат

*) Мы постараемся не слишком часто просить читателя поверить нам на слово. Но, признаемся честно, без этого обойтись не удастся. Тех, кто прочел «Что такое квантовая механика?» или какую-нибудь другую научно-популярную книгу по квантовой механике, возможно, удовлетворит следующая расшифровка этого отношения. Одна сто тридцать седьмая есть отношение «радиуса» электрона $e^2/m_e c^2$ к комптоновской длине волны $\hbar/m_e c$ (m_e — масса электрона, равная $\approx 10^{-27}$ г). Трудно сказать, объясняет ли это что-нибудь, но, во всяком случае, помогает обращаться с величинами, важными в атомной физике, а главное, показывает, как можно получать безразмерные комбинации, составленные из мировых постоянных,

электроны и протоны, а также, кроме того, нейтроны (вокруг них, правда, нет электрического поля, что засвидетельствовано в их названии), мы расскажем, почему отнюдь не все макроскопические тела суть макроскопические источники магнитного поля.

В-третьих, мы попытаемся объяснить, почему различные тела ведут себя по-разному, если их подвергнуть воздействию магнитного поля.

В-четвертых, мы подробно расскажем о телах, которые принято называть *магнетиками*. Среди них важное место занимают магниты, или *ферромагнетики* — макроскопические источники магнитного поля.

Этот перечень не исчерпывает тему книги. Мы ничего или почти ничего не расскажем об ядерном магнетизме; совсем не коснемся происхождения магнитного поля Земли и других планет; обойдем вниманием увлекательные проблемы исследования магнитных полей в космосе.

Умалчивая о магнитном поле Земли, мы ощущаем угрызения совести: ведь именно использование земного магнетизма в целях навигации (компас) было первым в истории цивилизации практическим применением магнитных свойств. И хотя строгие критерии оценки важности изобретений, к сожалению, отсутствуют, по-видимому, все согласятся, что компас — свободно вращающаяся магнитная стрелка — одно из важнейших человеческих изобретений.

Успокаиваем мы себя, вспоминая мудрое изречение Козьмы Прутков: «Нельзя объять необъятное». Действительно, нельзя! А магнетизм так же неисчерпаем, как природа.

Эта книга, как и все книги библиотечки «Квант», рассчитана на школьников старших классов. Возможно, она покажется несколько сложнее своих «товарок» по библиотечке.

Часто читателей отпугивают математические сложности. Мы об этом думали, но не могли не использовать векторы и действия с ними, понятия функции, ее производной и интеграла от нее. К более сложным математическим операциям мы не прибегаем. Некоторые математические действия мы специально вынесли в задачи. Те читатели, которые решат задачи, поймут прочитанное гораздо глубже, чем те, кто отложит решение задач на потом. Но главное, что нас волнует (в смысле контакта с читателем), это — не математические трудности. Глав-

ная трудность, которая, как нам кажется, ожидает читателя — обилие новых физических понятий.

Большинство их мы постарались в тексте и в подстрочных примечаниях разъяснить; если неразъясненные понятия остались, мы просим нас извинить, и будем очень рады, если читатели не поленятся сообщить нам об этом через Издательство. Мы, естественно, будем благодарны всем замечаниям, возникшим при чтении, и надеемся, что те из них, с которыми мы согласимся, удастся учесть, если Издательство найдет нужным переиздать «Природу магнетизма».

Мы глубоко благодарны Андрею Станиславовичу Боровику-Романову и Людмиле Андреевне Прозоровой, чьи замечания мы постарались учесть и чья доброжелательность была нам поддержкой в трудные моменты работы над книгой.

В оформлении рукописи нам помогла Инна Каганова, а рисунков — Шевхи Мевлют, за что мы им весьма признательны.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МАГНИТЫ

§ 1. Электрические и магнитные диполи

Структура электрического поля, созданного точечным зарядом, и структура магнитного поля вокруг тонкого проводника, по которому течет ток, столь непохожи, что искать какую-либо аналогию между ними не приходит в голову. Но не будем торопиться.

Рассмотрим систему двух электрических зарядов, одинаковых по величине и противоположных по знаку, расположенных на расстоянии d друг от друга (рис. 5).

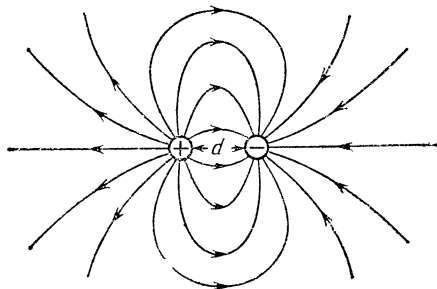


Рис. 5. Силовые линии поля электрического диполя.

Напряженность электрического поля, созданного этой системой в произвольной точке на линии, проведенной через оба заряда, равна

$$E = \frac{q}{r^2} - \frac{q}{(r+d)^2}. \quad (1.1)$$

Мы просто сложили напряженности полей от двух зарядов, так как оба вектора направлены по одной прямой. В этом преимущество симметрично расположенных точек — точек на линии, проходящей через заряды.

Пусть эта точка находится далеко от системы зарядов: $r \gg d$. Тогда

$$E = q \frac{2dr + d^2}{r^2 (r + d)^2} \approx \frac{2qd}{r^3}. \quad (1.2)$$

На больших расстояниях от зарядов q и $-q$ напряженность электрического поля убывает быстрее, чем напряженность электрического поля, созданного каждым зарядом в отдельности. Величину $p = qd$ называют *электрическим дипольным моментом*, а систему двух одинаковых по величине разноименных зарядов — *диполем*. Дипольный момент — вектор, причем принято считать, что он направлен от положительного заряда к отрицательному:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}. \quad (1.3)$$

Дипольный момент определяет электрическое поле нейтральной системы двух зарядов — диполя — на расстояниях, больших по сравнению с расстоянием между зарядами.

Складывая напряженности полей двух зарядов по правилам сложения векторов в произвольной, но, конечно, достаточно удаленной от зарядов точке (т. е. учитывая условие $r \gg d$), можно получить *)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}}{r^3}; \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.4)$$

Воспользовавшись формулой (1.4), нарисуем силовые линии, изображающие поле диполя (см. рис. 5). Если не интересоваться структурой поля на расстояниях порядка или меньших размера диполя d , то диполь можно изобразить точкой (точнее, стрелкой малых размеров, ведь диполь — вектор). С точки зрения наблюдателя, находящегося достаточно далеко от диполя, начала и концы силовых линий совпадают.

А теперь на секунду представьте себе, что разделить заряды нельзя, т. е., что в природе нет свободных зарядов, — только связанные. Тогда, естественно, именно диполи становятся элементарными (простейшими) источниками электрического поля.

Чтобы диполи *полностью* определяли интересующие нас электрические поля, надо от них потребовать, чтобы они были микроскопически малы, скажем, такими, как

*) *Задача.* Выведите формулу (1.4).

атом или даже меньше. Тогда любое макроскопическое расстояние будет большим (по сравнению с размером диполя), а формулы (1.2), (1.4) — совершенно точными.

Нейтральность системы зарядов, т. е. равенство положительных и отрицательных зарядов, можно проверить по тому, как ведет себя электрическое поле вдали от системы. Электрическое поле вокруг нейтральной системы убывает при удалении от нее на расстояние r быстрее, чем $1/r^2$. Можно говорить и о дипольно нейтральных системах, т. е. системах, дипольный момент

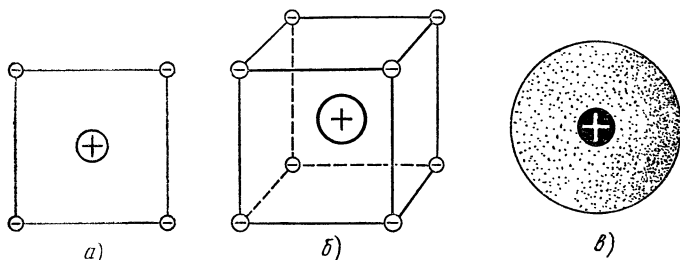


Рис. 6. Системы зарядов с электрическим дипольным моментом, равным нулю: а) отрицательные заряды $-q$ находятся в вершинах квадрата, а положительный заряд $+4q$ — в его центре; б) аналогично в случае куба; в центре его заряд $+8q$; в) в центре сферы находится положительный заряд Q , заряд $-Q$ равномерно распределен по сфере.

которых равен нулю. Вдали от такой системы электрическое поле убывает быстрее, чем $1/r^3$. На рис. 6 изображено несколько систем зарядов с нулевым дипольным моментом *).

Существование дипольного момента у системы зарядов — свидетельство асимметрии в распределении зарядов.

Конечно, не обязательно рассуждать о том, что было бы, если бы свободные заряды не существовали, но ведь мы знаем, что *магнитных* зарядов в природе действительно нет.

В поисках элементарных источников *магнитного поля* рассмотрим круговой ток, т. е., попросту говоря, проволочное кольцо площади S , по которому течет ток (его силу примем равной J). Для простоты, из сообра-

*) *Задача.* Рассчитайте поле вдали от двух одинаковых антипараллельных диполей, расположенных на расстоянии l друг от друга перпендикулярно к линии, их соединяющей.

жений симметрии, магнитное поле будем вычислять в точке, расположенной на прямой, перпендикулярной к плоскости контура (кольца) и проходящей через его центр (рис. 7). Разобьем контур на малые участки

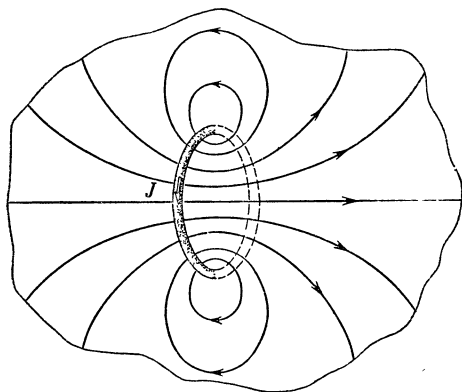


Рис. 7. Магнитное поле замкнутого тока J , текущего по плоскому кольцу. Магнитные силовые линии показаны на плоскости, перпендикулярной к кольцу.

длиной Δl . По закону Био — Савара величина напряженности магнитного поля, создаваемого одним участком, равна

$$\Delta H = J \frac{\Delta l}{cr^2}.$$

Определение r ясно из рис. 7.

Складывая поля, создаваемые отдельными участками кольца, найдем:

$$H = \frac{2JS}{cr^3}. \quad (1.5)$$

Полученная формула очень похожа на формулу (1.2). Это дает основание комбинацию

$$\frac{JS}{c} = M_r \quad (1.6)$$

назвать величиной *магнитного дипольного момента кругового тока*. Если же приписать магнитному дипольному моменту направление, совпадающее с перпендикуляром к плоскости кругового тока (знак выбирается по правилу «буравчика»), то с помощью вектора M_r (магнитного

диполя) магнитное поле от кругового тока выражается формулой, совершенно аналогичной формуле (1.4):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{M}_T \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{M}_T}{r^3}. \quad (1.7)$$

Для ее вывода надо уметь сложить магнитные поля $\Delta \mathbf{H}$, созданные отдельными участками Δl контура, учитывая векторный характер складываемых полей.

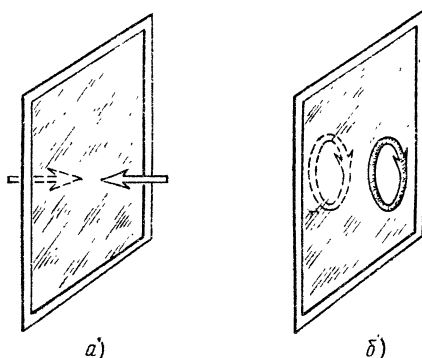


Рис. 8. Зеркальное отражение: а) электрического диполя; б) магнитного диполя.

Совпадение (с точностью до принятых буквенных обозначений) формул (1.4) и (1.7) показывает, что электрическое поле, созданное двумя разноименными зарядами, и магнитное поле, созданное круговым током, имеют совершенно одинаковую структуру, правда, если не интересоваться полем в непосредственной близости от зарядов или от кольца с током. В предельных же случаях бесконечно близко расположенных зарядов или бесконечно малого радиуса кольца координатная зависимость полей совершенно одинакова.

Итак, магнитный диполь может существовать, причем для этого нет необходимости «придумывать» магнитные заряды. Магнитный диполь осуществляется движением обычного электрического заряда.

Чтобы не слишком увлекаться сходством между электрическим и магнитным диполями, обратим внимание на глубокое различие между этими векторами.

Во-первых, проделаем мысленный эксперимент, изображенный на рис. 8, — отразим оба диполя в зеркале: электрический диполь изменит направление на обратное,

а магнитный диполь — нет. Во-вторых, мгновенно изменить ход времени на обратный (эта операция, возможная только «на бумаге», носит название инверсии времени). При этом с электрическим диполем ничего не произойдет, а магнитный поменяет знак: ведь при инверсии времени все частицы будут двигаться в противоположную сторону, следовательно, изменит знак ток J .

§ 2. Гиромагнитное отношение

Существует простая связь между магнитным моментом M_{τ} и механическим моментом количества движения системы заряженных частиц L . Для установления этой связи преобразуем выражение (1.6) для магнитного момента M_{τ} . По определению сила тока J есть $(q/2\pi R)v$. Действительно, $q/2\pi R$ — это величина заряда, проходящего на единицу длины проводника, а скорость v — путь, проходимый зарядом за единицу времени. Так как $S = \pi R^2$, то

$$M_{\tau} = \frac{qvR}{2c}. \quad (1.8)$$

С другой стороны, момент количества движения L рассматриваемой системы равен

$$L = m_q v R, \quad (1.9)$$

где m_q — масса движущихся зарядов.

Сравнивая (1.8) и (1.9), имеем

$$\frac{M_{\tau}}{L} = \frac{q}{2m_q c}. \quad (1.10)$$

В таком виде это соотношение не лучше, чем соотношение (1.6), связывающее магнитный момент с силой тока J . Однако, если вспомнить, что ток в проводнике — это поток электронов, то становится ясным, что $q = Ne$, а $m_q = m_e N$, где N — число движущихся электронов проводника (электронов проводимости). Тогда из (1.10) получаем

$$\frac{M_{\tau}}{L} = \frac{e}{2m_e c}. \quad (1.11)$$

Отношение двух макроскопических величин (магнитного момента токового кольца и момента количества движения электронов в нем) оказалось равным комбинации величин, характеризующих микроскопические по-

сители заряда в проводнике. Отношение $\gamma = M_r/L$ получило название *гиромагнитного отношения*.

Выражение (1.11), полученное при рассмотрении движения электронов по кольцу, остается справедливым, какое бы движение ни совершали электроны. Если механический момент этого движения равен L , то его магнитный момент равен $M = \frac{e}{2m_e c} L$.

Нам в дальнейшем придется уточнить это утверждение. Оказалось, что электроны, сами по себе, даже неподвижные, являются источниками магнитного поля, микроскопическими магнитными диполями. Но будем некоторое время делать вид, что мы этого не знаем.

Гиромагнитное отношение часто измеряют в величинах $\frac{e}{2m_e c}$. В рассмотренном нами случае его надо считать равным единице. Если бы ток в проводнике переносили ионы, а не электроны, то гиромагнитное отношение было бы в тысячи раз меньше. Трудно себе представить гиромагнитное отношение больше единицы: ведь электроны — самые легкие частицы, имеющие заряд!

§ 3. Существуют ли элементарные источники магнитного поля? Гипотеза Ампера

Итак, круговой ток или, как говорят, токовый лепесток — это магнитный диполь, источник магнитного поля. Но существуют ли токовые лепестки в природе? И если они есть, то какова их природа?

Из школьного курса известна гипотеза Ампера о молекулярных токах. Согласно этой гипотезе, необычайно смелой для своего времени (Ампер жил с 1775 по 1836 г.!), внутри молекул и атомов текут электрические токи, т. е. атомы и молекулы суть токовые лепестки, а значит, — магнитные диполи. По сути дела, гипотеза Ампера блестяще подтвердилась, когда была понята электронная структура атома. Подтвердилась в том смысле, что, действительно, движущиеся вокруг атомных ядер электроны создают электрические токи, а токовые лепестки — магнитное поле *).

*) Вот короткая выдержка из статьи А. Эйнштейна 1915 г. (Собрание научных трудов. — М.: Наука, 1967, т. III, с. 360). Она покажет, сколь смелой была гипотеза Ампера для своего времени

Однако, если эти слова понимать буквально и оставаться на классических (неквантовых) представлениях (во времена Ампера других и не существовало), то придется прийти к выводу, что в природе нет *элементарных* магнитиков — *наименьших* источников магнитного поля. Рассмотрим простейший атом — атом водорода. В нем один электрон вращается вокруг протона, причем, согласно классическим законам движения, электрон движется по эллипсу (в частном случае по окружности; для простоты мы ограничимся только этим случаем).

Равенство центростремительной и кулоновской сил устанавливает зависимость между радиусом a орбиты электрона и его скоростью v :

$$\frac{e^2}{a^2} = \frac{m_e v^2}{a},$$

или

$$\frac{e^2}{a} = m_e v^2. \quad (1.12)$$

Полная энергия ε электрона есть сумма потенциальной и кинетической энергий:

$$\varepsilon = -\frac{e^2}{a} + \frac{m_e v^2}{2} = -\frac{e^2}{2a},$$

или

$$a = -\frac{e^2}{2\varepsilon}. \quad (1.13)$$

Таким образом, энергия ε электрона однозначно определяет радиус его орбиты (пусть не удивляет знак минус — энергия электрона в атоме отрицательна; произвольное постоянное слагаемое в потенциальной энергии выбрано так, чтобы энергия равнялась нулю на бесконечном расстоянии от ядра; см. стр. 9). Момент

и, кроме того, поможет понять: гипотеза, казалось бы, объясняющая экспериментальные факты, если она достаточно серьезна, как правило, ставит новые глубокие вопросы.

«Теория Ампера в ее современной (на то время, конечно, — М. К. и В. Ц.), электронной форме сталкивается с той трудностью, что, согласно электромагнитным уравнениям Максвелла, электроны, совершающие круговое движение, должны терять свою кинетическую энергию вследствие излучения, так что молекулы или атомы со временем должны терять или уже потеряли свой магнитный момент, *чего на самом деле, конечно, не происходит*» (курсив наш — М. К. и В. Ц.).

количества движения электрона L равен $m_e v a$. Отсюда и из (1.12)

$$L = m_e a \frac{e}{\sqrt{m_e a}} = e (m_e a)^{1/2},$$

а магнитный момент атома водорода

$$M_a = \frac{e^2}{2m_e c} (m_e a)^{1/2}. \quad (1.14)$$

В классической механике электрон может иметь сколь угодно большую по модулю (отрицательную!) энергию и, следовательно, сколь угодно малый радиус вращения вокруг ядра. Хотя при малом радиусе скорость вращения велика, но момент количества движения с уменьшением радиуса падает. При $a \rightarrow 0$ (т. е. при $|\varepsilon| \rightarrow \infty$) момент количества движения L , а с ним и магнитный момент M_a стремятся к нулю. Итак, получается что могут быть сколь угодно малые магнитные моменты, а фиксированных элементарных (как заряды) магнетиков нет.

Но этот вывод не соответствует действительности. Наше рассуждение неверно. Неверно потому, что не учитывает квантовый характер движения микроскопических частиц.

Надо признать, что пересмотр законов движения атомных и субатомных частиц был связан отнюдь не с нашими магнетиками. Вся совокупность фактов, относящихся к свойствам атомов, требовала ревизии классической физики. И прежде всего, факт существования устойчивых одинаковых атомов. Формулы (1.12) — (1.14) фактически дают классическую теорию атома водорода. Но так как в классической физике нет никаких оснований для выбора расстояния a , на котором электрон вращается вокруг ядра, то становится очевидным: разные атомы водорода должны были бы отличаться друг от друга; у одного атома электрон мог быть ближе к ядру, у другого — дальше. А при столкновениях размеры атомов (радиусы орбит) должны изменяться. И еще: электрон, обладающий электрическим зарядом и движущийся с ускорением (его скорость при движении по эллиптической орбите изменяется как по величине, так и по направлению, а при движении по окружности — только по направлению), согласно электродинамике излучает электромагнитные волны и, значит, теряет энергию (см. цитату из статьи Эйнштейна на стр. 20). Уменьшение

энергии электрона сопровождается его приближением к ядру (см. формулу (1.13)), так что в конце концов должно произойти падение электрона на ядро. Время падения, по человеческим масштабам, ничтожно мало, порядка 10^{-10} с *). Оно убедительно показывает неприменимость классических законов движения к движению микроскопических частиц. Спасти классическую механику, считая, что между электроном и протоном действует не кулоновская сила, а какая-то другая, невозможно: как мы уже говорили, опыты Резерфорда по рассеянию α -частиц непосредственно установили, что ядро создает вокруг себя кулоновское поле.

Ниже мы приведем некоторые сведения о квантовой механике, без которых просто невозможно понять природу магнитных явлений, а пока поступим так.

Раз для существования элементарных магнетиков необходимо, чтобы радиус траектории электрона в атоме имел бы определенный размер, возьмем его из квантовой механики. В частности, размер атома водорода равен ***) $a_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$. Подставим a_1 вместо a в формулу (1.14). В результате получим, что значение магнитного момента атома водорода есть

$$M_a = \frac{e\hbar}{2m_e c}. \quad (1.15)$$

Это отношение обозначают, как правило, буквой μ и называют *магнетоном Бора*.

Магнетон Бора и есть элементарный электронный магнитный момент. Элементарный в том смысле, что электрон не может иметь магнитный момент меньше μ .

*) См. М. И. Каганов. Электроны, фононы, магноны. — М.: Наука, 1979, с. 22. При расчете предположено, что «падение» начинается с расстояния $\approx 10^{-8}$ см.

**) Законы классической физики, как мы говорили, не дают возможности определить радиус траектории электрона вокруг ядра. Он может быть любым. В этом легко убедиться, заметив, что из двух величин (e и m_e), которые входят в уравнение движения электрона, нельзя получить выражение, имеющее размерность длины. Квантовая механика привносит еще одну величину — постоянную Планка \hbar . Из трех величин можно создать комбинацию с размерностью длины.

Задача. Покажите, что $\frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ — единственная комбинация с размерностью длины, построенная из величин e , m_e и \hbar . Разъясните, почему мы не включили скорость света c в число величин, из которых строится размер атома.

Все величины, входящие в правую часть формулы (1.15), известны (мы их уже приводили). Подставляя значение e , \hbar , m_e и c , найдем

$$\mu = 10^{-20} \text{ эрг/Гс.} \quad (1.16)$$

Надо отчетливо понимать, что мы не вывели формулу (1.15). Ведь значение размера атома водорода взято «с потолка». Более того, как мы убедимся, магнитный момент, обязанный вращению электрона вокруг протона в основном состоянии атома водорода (т. е. при наименьшей возможной энергии), равен нулю.

Хотелось бы, чтобы читатель запомнил пока два обстоятельства:

- 1) элементарные магнетики существуют и
- 2) порядок величины электронных магнитных моментов определяется магнетоном Бора (1.15).

§ 4. Немного о квантовой механике

Классическая или, как часто говорят, подчеркивая роль ее создателя, ньютоновская механика безукоризненно описывает движение макроскопических тел, т. е. тел, состоящих из огромного числа атомов и молекул *). Однако движение электронов в атомах подчиняется не классической, а квантовой механике. Это радикально сказывается на всех, в том числе и магнитных, свойствах атома. Или, чуть точнее: именно с помощью квантовой механики нам удастся правильно (т. е. в соответствии с экспериментом) описать свойства атомов, в частности, — устойчивость атомов.

В чем же отличие квантовых законов движения от классических? Для полного ответа на этот вопрос нужно изучить квантовую механику — раздел современной физики, исследующий движения микрообъектов: атомов, молекул и частиц, входящих в их состав. Сколько-нибудь основательное знакомство с квантовой механикой требует большой математической подготовки, так как математический аппарат квантовой механики достаточно сложен. Кроме того, понимание законов квантовой

*) Эпитеты не дают возможности оценить, сколь велико число атомов в макроскопическом теле. Наши чувства не приспособлены для осознания подобных чисел. В 1 см^3 твердого тела 10^{23} атомов. Уложенные в цепочку вплотную друг к другу (размер атома 10^{-8} см) они протянутся более чем на миллиард километров,

механики требует отказа от ряда привычных, приобретенных в повседневном опыте представлений. Возможно, преодоление инерции личного опыта представляет даже большую сложность, чем овладение математическим аппаратом квантовой механики. Во всяком случае те из физиков, которые не принимали квантовой механики (а среди них был и великий Эйнштейн!), не принимали именно ее основных физических положений.

Мы вынуждены ограничиться лишь следствиями квантовой механики, имеющими непосредственное отношение к магнитным свойствам электронов, атомов, молекул и макроскопических тел. Предупредим: «следствия» покажутся странными. Не следует в них сомневаться. Опираясь именно на эти «следствия», мы будем разъяснять природу магнетизма.

Соотношения неопределенностей. Частицы — волны

Одно из основных отличий квантовых частиц (т. е. частиц, движение которых подчиняется квантовой механике) от классических (движение которых описывается механикой Ньютона *) — отсутствие у них траектории. Поскольку в повседневной жизни мы привыкли иметь дело с макроскопическими телами, невольно наглядное представление о движении таких тел по траектории хотелось бы перенести и на микрообъекты, движение которых наблюдать непосредственно нельзя. О свойствах микрочастиц можно делать те или иные суждения только на основании данных опыта, не навязывая им (микрочастицам) свойств макроскопических тел. Так вот, данные опыта (например, спектральные характеристики атомов и молекул) требуют отказа от понятия траектории электрона в атоме. Траектория в каждый момент времени определяется положением частицы и ее скоростью. Отсутствие траектории означает, что квантовая частица не имеет одновременно определенных координат (положения) и скорости. Состояние квантовой частицы нельзя описывать столь же подробно, как состояние классической частицы. Утверждение о том,

*) Движение всех тел можно описывать уравнениями квантовой механики, но при движении макроскопических тел в этом нет необходимости: ошибка при использовании уравнениями классической механики пренебрежимо мала.

что частица не может иметь одновременно определенную координату и скорость, называется принципом неопределенности.

Существование принципа неопределенности означает, что физическая величина, зависящая от положения (координаты) и скорости частицы, не имеет, вообще говоря, определенного значения. (Заметим сразу, что момент количества движения (1.9) — именно такая физическая величина; L зависит от координаты R и скорости v .)

Принцип неопределенности имеет количественное выражение в виде неравенств, которые называют соотношениями неопределенностей, или соотношениями Гейзенберга:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta p_y \Delta y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta p_z \Delta z \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (1.17)$$

где Δx , Δy , Δz и Δp_x , Δp_y , Δp_z — неопределенности координат x , y , z и проекций импульса $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ на оси x , y , z . Формальный переход от квантовой механики к классической можно осуществить, устремив постоянную Планка \hbar к нулю. Неравенства (1.17) означают: чем точнее определена одна из величин, например, x , тем менее точно — другая p_x . Заметим, что точность определения x не влияет на точность определения p_y . Физические величины разбиваются на своеобразные пары, связанные соотношением неопределенностей.

Конечно, главное в квантовой механике — не отказ от классического описания движения, а формулировка способов описания поведения микроскопических частиц. Характер описания существенно отличается от принятого в классической физике. Так как есть физические величины, не имеющие из-за принципа неопределенности определенного значения, то квантовой механике приходится ограничиваться определением вероятности того или иного значения рассматриваемой физической величины. Подчеркнем, вероятностный характер квантовой механики не обусловлен неполнотой наших знаний о квантовой системе. Он — следствие свойств микроскопических частиц. Так устроена природа. Пожалуй, можно говорить об ограниченной возможности описывать квантовую систему классическими величинами — координатами и импульсами. Мерой ограничения служат соотношения неопределенностей (1.17).

Соотношения, похожие на соотношения неопределенностей, имеются в оптике. Известно, что плоская электромагнитная волна с волновым вектором *) \mathbf{k} заполняет все пространство. Однако электромагнитное поле можно сконцентрировать в конечной, даже весьма малой области пространства. Для этого приходится пользоваться большим числом волн. Такая конструкция из волн называется *волновым пакетом*. Волновой пакет характеризуется интервалами $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$ проекций волновых векторов, необходимых для концентрации поля в области пространства $\Delta x \Delta y \Delta z$. Набор волновых векторов тем больше, чем меньшую область пространства занимает волновой пакет:

$$\Delta x \Delta k_x \geq \frac{1}{2}, \quad \Delta y \Delta k_y \geq \frac{1}{2}, \quad \Delta z \Delta k_z \geq \frac{1}{2}. \quad (1.18)$$

Сравнивая неравенства (1.18) и (1.17), видим, что они эквивалентны, если считать

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}. \quad (1.19)$$

Это удивительное равенство, связавшее импульс, характеризующий движение частицы, с волновым вектором, характеризующим волну, впервые написал французский физик де-Бройль в 1925 г. Он же связал энергию частицы ε с частотой волны ω :

$$\varepsilon = \hbar \omega. \quad (1.20)$$

Оба равенства (1.19) и (1.20) называют *соотношениями де-Бройля*. Они означают признание за частицами волновых свойств. Поэтому квантовую механику называют часто *волновой механикой*.

Соотношения неопределенностей и соотношения де-Бройля — строгие следствия квантовой механики. Столь же строго квантовая механика показала, что волны обладают корпускулярными свойствами (т. е. свойствами частиц). Поэтому соотношения (1.19) и (1.20) можно читать и слева направо (ставя движению частицы в соответствие волновой процесс), и справа налево (подчеркивая корпускулярные свойства волн).

*) Волновой вектор — это вектор \mathbf{k} , направленный вдоль направления распространения волны и равный по величине $k = 2\pi/\lambda$ (λ — длина волны),

Стационарные состояния

Среди всех состояний физической системы (частицы, атома, молекулы) существуют такие, в которых одна или одновременно несколько физических величин имеют вполне определенное значение. Эти состояния играют фундаментальную роль в квантовой механике, являясь основой описания любого (произвольного) состояния физической системы. Так, например, существуют состояния с определенными значениями импульса частицы. Как следует из соотношений неопре-

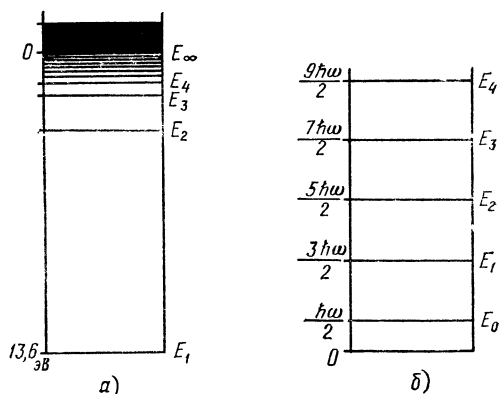


Рис. 9. Дискретные уровни энергии: а) электрона в атоме водорода $E_n = -E_0/n^2$; $n = 1, 2, \dots$; $E_0 \approx 13,6$ эВ; б) гармонического осциллятора с частотой ω ($E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega$; $n = 0, 1, 2, \dots$).

деленностей, в этих состояниях совершенно не определено положение частицы. Это видно также и из соотношений де-Бройля: движению частицы с импульсом p ставится в соответствие плоская волна с волновым вектором $k = p/\hbar$, заполняющая все пространство.

Особую роль играют состояния с определенной энергией, которые называются *стационарными*. Квантовая система (например, атом), предоставленная самой себе, находится в одном из своих стационарных состояний.

Наиболее, пожалуй, характерное свойство квантовых систем — дискретность некоторых физических величин, которые при классическом рассмотрении могут прини-

мать непрерывный ряд значений. В частности, энергия электрона в атоме может принимать только вполне определенные значения (рис. 9), которые можно перенумеровать. Их называют энергетическими уровнями. Каждому значению энергии отвечает либо одно, либо несколько стационарных состояний. Если несколько, то они отличаются значениями других физических величин, конечно, таких, которые вместе с энергией могут иметь определенные значения.

Хотя и простой, но очень важный объект механики (и классической, и квантовой) — осциллятор. Представьте себе частицу массы m , колеблющуюся под действием силы F , пропорциональной расстоянию x частицы от ее положения равновесия ($F = -kx$). Колеблется такая частица с вполне определенной частотой $\omega = \sqrt{k/m}$. Классическая частица может иметь любую энергию колебания $\epsilon_{\text{кол}}$ (она определяется амплитудой колебания), а квантовая — только одну из дискретного набора (рис. 9, б)):

$$\epsilon_{\text{кол}} = (n + 1/2) \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Среди всех стационарных состояний надо выделить состояние с наименьшей энергией. Его называют *основным*. В основном состоянии физическая система (атом — для определенности) может находиться бесконечно долго — истинно стационарное состояние. Состояния с большей энергией — возбужденные состояния. Они лишь приблизительно стационарные. Испустив электромагнитную волну, атом, находящийся в возбужденном состоянии, может перейти в состояние с меньшей энергией. «Скатываясь» по энергетическим уровням, в конечном итоге атом попадет в основное состояние. Что же дает нам право все-таки считать возбужденные состояния атома стационарными? То, что время жизни в возбужденном состоянии сравнительно велико (конечно, по атомным масштабам). Интересно подчеркнуть: этот факт — следствие малости заряда электрона. Помните: $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$? Так вот: время жизни атома в возбужденном состоянии приблизительно равно $\tau_a \left(\frac{\hbar c}{e^2} \right)^3 \approx \tau_a (137)^3$, где τ_a — время обращения электрона по «орбите». Шесть миллионов раз «обернется» электрон вокруг ядра, прежде чем перейдет из возбужденного состояния в основное! Есть все основания считать возбужденное состояние стационарным.

Вы, конечно, понимаете, что слова «орбита» и «обернется» взяты в кавычки потому, что никакой орбиты в действительности у электрона, движущегося в атоме, нет. Что же в таком случае означает время τ_a ? Вспомним соотношение де-Бройля (1.20) и применим его к соотношению энергий между возбужденным и основным состояниями:

$$\hbar\omega = \varepsilon_{\text{возб}} - \varepsilon_{\text{осн}} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\varepsilon_{\text{возб}} - \varepsilon_{\text{осн}}}{\hbar}.$$

Частота ω и период колебания τ обратно пропорциональны друг другу, т. е. $\tau = 2\pi/\omega$. Если вместо частоты ω подставить только что выписанное выражение, то соответствующий ей период и будет «временем обращения» τ_a :

$$\tau_a = \frac{2\pi\hbar}{\varepsilon_{\text{возб}} - \varepsilon_{\text{осн}}}.$$

Иногда движение электрона в атоме можно с большой точностью описывать с помощью классической механики. Тогда τ_a , подсчитанное по *квантовой* формуле, действительно совпадает с классическим временем обращения (уже без кавычек!).

Мы сформулировали некоторые результаты квантовой механики, ничего не сказав о математическом аппарате, с помощью которого они получены. Описание математического аппарата не входит в нашу задачу. Отметим только: существует несколько очень различных по форме, но адекватных по существу математических аппаратов квантовой механики. Один из них основан на исследовании решений дифференциального уравнения, которому должна удовлетворять волновая функция квантовой системы (Э. Шредингер). Производя строго регламентируемые операции над этой функцией, можно извлечь интересующие нас физические следствия: значения физических величин, допускающих непосредственное сравнение с опытом.

Волновую функцию обозначают чаще всего буквой ψ . Мы тоже будем пользоваться этим обозначением. Надо учесть (это важно для дальнейшего): ψ — комплексная функция, определенная с точностью до комплексного множителя. Или, другими словами, волновые функции ψ и $\alpha\psi$ описывают одно и то же состояние, если α — постоянная величина.

Физический смысл волновой функции особенно нагляден, если ψ зависит от координаты \mathbf{r} и времени t . Тогда величина $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ пропорциональна вероятности нахождения частицы в точке \mathbf{r} в момент времени t (М. Борн).

Еще раз об атоме водорода

Простейшая квантовая система — атом водорода: электрон, вращающийся вокруг протона. Энергетические уровни описываются простой формулой:

$$\varepsilon_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.21)$$

Что эта формула означает? Она означает, что атом водорода может находиться в разных состояниях — в состояниях с разной энергией. Среди них есть состояние с наименьшей энергией: как мы говорили, его называют основным. Энергия электрона в основном состоянии равна $\varepsilon_1 = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \approx 13,6 \text{ эВ} \approx 2,18 \cdot 10^{-11} \text{ эрг}$. Это значит, что для того, чтобы оторвать электрон от протона, надо затратить 13,6 эВ энергии. Если атом находится не в основном, а в возбужденном состоянии, он может, как мы говорили, лишнюю энергию излучить в виде света. Частота излученного света определяется формулой Бора, являющейся формулировкой закона сохранения энергии в применении к процессу рождения фотона атомом водорода:

$$\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} = \hbar\omega. \quad (1.22)$$

Все, что мы говорили до сих пор — строгие следствия квантовой механики. А теперь мы поступим непоследовательно. Хотя мы убеждали читателей в том, что квантовая механика отменила понятие траектории, используем классическую формулу (1.13) наряду с квантовой формулой (1.21). Мы увидим, что квантование энергии приводит к квантованию орбит электрона *). Электрон может вращаться только по допустимым орбитам с ра-

*) Такую эклектическую механику, сохранившую черты классической механики, но дополненную условиями квантования, в начале XX века построил Н. Бор для объяснения атомных спектров. Успех в объяснении спектра водорода (формулы (1.21) и (1.22)) показал, что физика находится на правильном пути,

диусами, равными $a_n = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} n^2$. Основному состоянию соответствует наименьший радиус орбиты, равный $a_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$. Мы уже использовали это обстоятельство для получения величины элементарного магнетика (см. стр. 23). К сожалению, простая схема, которая могла возникнуть у вдумчивого читателя,

*квантование орбиты \rightarrow устойчивые токовые лепестки \rightarrow
 \rightarrow элементарные (атомные) магнетики,*

оказывается неправильной и именно из-за того, что электрон движется не по траектории. Так, в основном

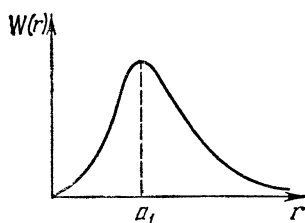


Рис. 10. Распределение вероятностей $W(r)$ обнаружить электрон на расстоянии r от ядра атома водорода в основном состоянии. Площадь под кривой равна единице.

состоянии ни о какой траектории говорить нельзя. Величина a_1 задает радиус сферы, внутри которой с вероятностью, близкой к единице, можно обнаружить электрон (рис. 10). Ни о каком более точном определении положения электрона и говорить не приходится — это противоречило бы принципу неопределенности. И токового лепестка никакого нет, а вследствие этого — такой странный результат: хотя

электрон движется вокруг ядра, его движение не приводит к появлению магнитного момента.

Но ведь мы знаем, что элементарные магнетики есть. Для того чтобы разобраться в возникшей путанице, надо понять, как модифицируется в квантовой механике закон сохранения момента количества движения.

§ 5. Момент количества движения. Пространственное квантование

Рассказ о моменте количества движения логичнее было бы поместить в предыдущий параграф. Мы его выделили, так как он особенно важен для понимания природы магнетизма.

В физике огромную роль играют законы сохранения. Атомная физика и физика магнитных явлений не являются

ся в этом смысле исключениями. Электроны в атоме движутся в поле силы, обладающей сферической симметрией, или, попросту говоря, сила, действующая на электрон со стороны ядра, зависит от расстояния электрона от ядра, но не зависит от направления. Классическая механика «предусмотрела» для такого случая специальный закон сохранения — закон сохранения момента количества движения *):

$$L = [\mathbf{pr}] \text{ не зависит от времени.}$$

А что по этому поводу говорит квантовая механика? Закон сохранения момента количества движения, конечно, имеет место и в квантовой механике (это общее правило: каждый «классический» закон сохранения имеет квантовый аналог; обратное неверно — есть квантовые законы сохранения, не имеющие аналога в классической физике).

Существование закона сохранения момента количества движения означает, что электрон, находящийся в определенном стационарном состоянии (т. е. в состоянии с определенной энергией), может иметь определенный момент количества движения. Но ... может ли частица иметь определенный момент количества движения? Вглядитесь в формулу $L = [\mathbf{pr}]$. В нее входят одновременно и \mathbf{p} и \mathbf{r} . А ведь соотношения неопределенностей (1.17) запрещают частице иметь одновременно определенные координату \mathbf{r} и импульс \mathbf{p} . К чему это приводит?

Строгое квантовомеханическое рассмотрение движения частицы в силовом поле с центральной симметрией показывает: сохраняющийся момент количества движения частицы может характеризоваться длиной L и проекцией L_z на какую-либо ось (мы ее назвали осью z).

Сразу же возникает вопрос: «На какую ось?». Безразлично! Именно этим безразличием подчеркивается изотропия силы, действующей на частицу. Конечно, если есть какая-либо причина, выделяющая определенное направление, то речь должна идти о проекции на это направление.

*) *Задача.* Умеющие дифференцировать и знающие смысл векторного произведения легко выведут из уравнения Ньютона $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ (изменение импульса \mathbf{p} за единицу времени равно силе \mathbf{F}), что $\mathbf{L} = [\mathbf{pr}] = \text{const}$, т. е. не зависит от времени (конечно, если \mathbf{F} — центральная сила: $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$).

Квантовая механика не только ограничивает задание момента количества движения двумя величинами (L и L_z) вместо трех (классический вектор характеризуется тремя проекциями), но и формулирует жесткие ограничения на эти величины. Проекция момента количества движения на ось z может принимать значения

$$L_z = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l, \quad (1.23)$$

а длина вектора момента количества движения

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)} > \hbar l, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

Таким образом, момент количества движения принадлежит к таким физическим величинам, которые *квантуются*, т. е. могут иметь только определенные дискретные значения *), пропорциональные постоянной Планка \hbar .

Когда хотят назвать величину вектора момента количества движения, называют просто значение числа l . В дальнейшем мы всегда будем под моментом количества движения понимать безразмерную величину l , а множитель \hbar опускать.

Обратите внимание: частица может обладать нулевым моментом количества движения!

Как правило, когда мы говорим, что частица имеет определенный момент количества движения, это означает что она находится в состоянии с заданным значением l . При этом проекция L на ось может иметь одно из $2l + 1$ значений. Более наглядно: момент количества движения может иметь только дискретные направления в пространстве (правда, не надо забывать, что ось z — ось квантования — имеет произвольное направление). Это квантовое свойство вектора момента количества движения называют *пространственным квантованием* (рис. 11).

Проекции L_x и L_y вектора L при заданных L и L_z не имеют определенных значений; можно говорить только о вероятности того или иного значения этих проекций. Если воспользоваться классическим образом, то сохра-

*) *Задача.* Исходя из формул классической механики, подсчитайте изменение скорости частицы с массой 1 г, движущейся по круговой орбите радиусом в 1 см, при изменении момента количества движения, обусловленного изменением L на единицу. Подумайте, почему не следует учитывать квантование при движении макроскопических тел?

няющийся вектор момента количества движения удобно представлять себе как вектор, прецессирующий вокруг оси z . Угол между L и осью z определяется значением L_z , т. е. m (см. (1.23) и рис. 11).

Наглядное представление о «прецессирующем» моменте количества движения объясняет, почему максимальное значение проекции L_z меньше L (см. (1.23) и (1.24)). Если бы L равнялось $\hbar l$, то остальные две проекции L_x и L_y в этом состоянии равнялись бы нулю, т. е. имели бы наряду с L и L_z определенные значения, что невозможно.

Классический момент количества движения и квантовый не разделены непреодолимой стеной. При $l \gg 1$ пространственное квантование не слишком существенно, а величина L , равная $\hbar \sqrt{l(l+1)} \approx \hbar l \left(1 + \frac{1}{2l}\right)$, почти неотличима от классического значения $\hbar l$.

Более строго: свойства классического момента количества движения могут быть получены в результате предельного перехода к большим значениям l . Это пример общего принципа, согласно которому квантовая механика содержит в себе классическую в виде предельного случая.

Момент количества движения нас интересует здесь, поскольку он связан с магнитным моментом. Квантовая механика не отменила связи, сформулированной равенством (1.11), т. е. подтвердила, что для электрона гиромагнитное отношение $\gamma = \frac{e}{2m_e c}$. Следовательно, если электрон находится в состоянии с проекцией момента количества движения, равной m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$), то проекция его магнитного момента равна

$$M_z = \frac{e\hbar}{2m_e c} m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (1.25)$$

Напрашивается такой вывод: движущийся электрон может претендовать на роль элементарного магнетика,

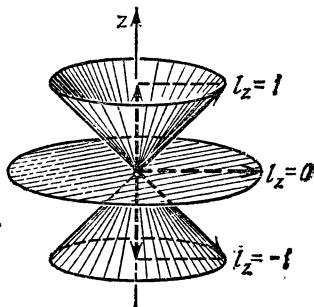


Рис. 11. Наглядная классическая картина, изображающая пространственное квантование.

правда, если он находится в состоянии с отличным от нуля моментом количества движения, т. е. если $l \neq 0$. С другой стороны, важно подчеркнуть: вращающийся вокруг ядра электрон может находиться в состоянии с равным нулю моментом количества движения. Конечно, это следствие отсутствия траектории! Мы уже говорили: электрон в атоме водорода, находящийся в основном состоянии, имеет момент количества движения, равный нулю! Поэтому не будем обсуждать пока, служат ли приведенные квантовомеханические результаты доказательством существования элементарных магнетиков. К этому вопросу мы еще вернемся в конце главы. Подчеркнем только, что квантовая механика, объяснив устойчивость атомов, одновременно показала, что электроны в атоме движутся так, что проекции их моментов количества движения суть целые числа в единицах \hbar ; существование связи между магнитным моментом и моментом количества движения показывает, что движущийся вокруг ядра электрон можно рассматривать как устойчивый магнитный момент, правда, обладающий квантовыми свойствами. Главное из них — пространственное квантование.

Устойчивость магнитного момента электрона, вращающегося вокруг ядра, столь важна для понимания атомной природы магнетизма, что мы решили написать краткое резюме этого параграфа.

Электроны в атоме имеют определенное состояние. Это состояние *устойчиво* — в том смысле, что изменить его можно, только сообщив электронам некоторую конечную порцию энергии $\Delta\varepsilon$ (по атомным масштабам — большую).

Каждое состояние характеризуется определенным моментом количества движения, а значит, и магнитным моментом. Следовательно, магнитный момент атома устойчив (в той же мере, что и состояние электронов атома).

§ 6. Магнитный момент в магнитном поле

До сих пор магнитный момент выступал в роли источника магнитного поля. И об этой его роли мы еще много будем говорить. Но сейчас, когда мы узнали, что в природе существуют устойчивые магнетики, следует обсудить, как они будут вести себя, если их поместить во внешнее, т. е. созданное другими источни-

ками, магнитное поле. При этом магнетики мы будем считать столь устойчивыми, что их величина не зависит от величины магнитного поля. Когда речь идет об атомных магнетиках, то это не есть какое-то специальное ограничение. Наоборот, чаще всего очень трудно создать столь большое магнитное поле, чтобы оно изменило величину атомного магнитного момента, правда, если он отличен от нуля *). Поэтому, когда речь идет о поведении магнитного момента в магнитном поле, то имеют в виду возможность его *перемещения* — движения как целого и поворотов.

Начнем с постоянного и однородного магнитного поля.

Свойство магнитной стрелки ориентироваться определенным образом в магнитном поле хорошо известно. И так же хорошо известно, что именно это ее свойство — основа применения магнитной стрелки в целях ориентации. Когда-то свойство «самопроизвольно» ориентироваться в пространстве воспринималось как чудо. Но, как сказал Эйнштейн (и именно по поводу поведения магнитной стрелки), «развитие ... умственного мира представляет собой в известном смысле преодоление чувства удивления — непрерывное бегство от „удивительного“, от „чуда“ **). Стрелка компаса ориентируется потому, что это энергетически выгодно. Энергия ϵ_M магнитного момента M в магнитном поле H есть

$$\epsilon_M = -MH = -MH \cos \theta, \quad (1.26)$$

где θ — угол между магнитным моментом и магнитным полем. Ясно, что при $\theta = 0$ энергия минимальна.

Если магнитный момент отклонен на угол θ от магнитного поля, со стороны магнитного поля действует момент силы, направленный перпендикулярно к плоскости, проходящей через магнитное поле H , в которой в данный момент времени находится магнитный момент. В результате магнитный момент будет вращаться, описывая конус вокруг магнитного поля. Так как магнитный момент отличается от момента количества движения множителем $\frac{e}{2m_e c}$, то частота его обращения есть

$$\omega_H = \frac{eH}{2m_e c} = \gamma H. \quad (1.27)$$

*) Во второй главе мы приведем соответствующую оценку величины магнитного поля.

**) Эйнштейн А, Собрание научных трудов, — М.: Наука, 1967, т. IV, с. 261.

Мы видим, что гиромагнитное отношение (мы по-прежнему обозначили его γ) выступает в новой роли, связывая магнитное поле H с частотой прецессии магнитного момента *) ω_H . В этой роли мы его будем встречать значительно чаще, чем в той, в которой оно появилось на сцене первый раз (см. (1.11)).

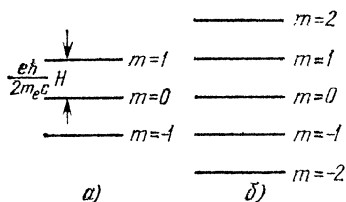


Рис. 12. Эквидистантные уровни энергии магнитного момента в постоянном магнитном поле: а) $l = 1$, б) $l = 2$.

Формулы (1.26) и (1.27) справедливы для классического магнитного момента. В случае квантового магнитного момента надо

учесть пространственное квантование. Как говорилось выше, момент может находиться в $2l + 1$ состояниях. Каждому состоянию соответствует свой магнитный уровень энергии, равный

$$\varepsilon_M^m = -\frac{e\hbar H}{2m_e c} m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (1.28)$$

Такая система уровней называется эквидистантной (рис. 12): расстояние между соседними уровнями не зависит от m и равно

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_M^m - \varepsilon_M^{m+1} = \frac{e\hbar H}{2m_e c}. \quad (1.29)$$

Если электрону «вздумается» перейти с уровня на уровень, ему придется поглотить или испустить квант электромагнитной энергии, равный $\hbar\omega = \frac{e\hbar H}{2m_e c}$. Таким образом, частота

электромагнитного поля, поглощаемого или испускаемого при переходе с одного магнитного уровня на другой, равна γH . Она совпадает с частотой классического вращения магнитного момента вокруг поля.

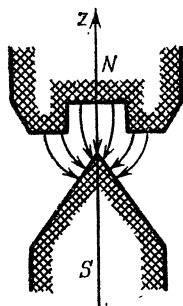


Рис. 13. Вблизи оси магнита магнитное поле направлено вдоль оси z и увеличивается по мере приближения к острию, т. е. зависит от z .

*) *Задача.* Найдите численное соотношение между длиной электромагнитной волны частоты ω_H и магнитным полем H .

А теперь пусть магнитное поле H , по-прежнему направленное вдоль оси z , само зависит от координаты z (рис.13). Следовательно, зависит от z и энергия $\epsilon_M = \epsilon_M(z)$. Зависимость энергии от координаты означает, что на магнитный момент действует сила, равная

$$F_H = M_z \frac{dH}{dz}. \quad (1.30)$$

В случае классического магнитного момента вместо M_z надо подставить $M \cos \theta$, а в случае квантового — одно из $2l + 1$ значений проекции магнитного момента на ось z (см. (1.25)).

§ 7. Спин и собственный магнитный момент электрона

К сожалению, историческая последовательность открытий в физике, как, впрочем, и в любой науке, не следует логике рассказа о науке. Удобно было бы этот раздел начать так.

Существование силы (1.30), действующей на магнитный момент, позволяет по отклонению пучка атомных частиц, проходящих через неоднородное магнитное поле, измерить их магнитный момент, а главное, убедиться в справедливости выводов квантовой механики о пространственном квантовании. Действительно, после того как пучок атомов, обладающих магнитным моментом $\frac{e}{2m_e c} L$, пройдет неоднородное магнитное поле, должны образоваться $2l + 1$ пространственно разделенных пучков (рис. 14). Такой эксперимент был поставлен немецкими физиками О. Штерном и В. Герлахом в 1922 г. Через неоднородное магнитное поле они пропустили пучок атомов водорода. Результат оказался совершенно неожиданным, хотя подтвердил факт пространственного квантования: пучок разделился на два. Казалось бы, пучок вовсе не должен был разделиться, ведь электроны в атоме водорода имеют нулевой момент количества движения. Предположим, при прохождении атомов через прибор они почему-то возбуждаются — переходят в состояние с большей энергией и ненулевым моментом количества движения. Но тогда число пучков на выходе из прибора должно быть нечетным: $2l + 1$. А эксперимент совершенно определенно показал: пучок делится на

два! Делится так, будто $l = 1/2$ — в резком противоречии с выводами квантовой механики.

... Так удобно было бы начать этот раздел, а потом разъяснить, что неожиданный результат опыта Штерна и Герлаха объясняется тем, что электрон обладает *спином* *).

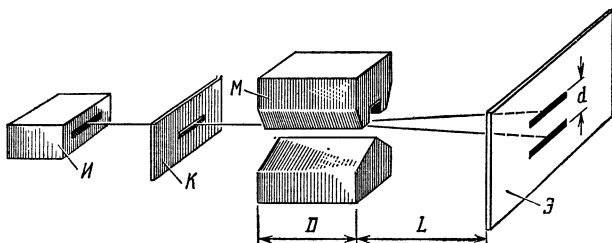


Рис. 14. Схема опыта Штерна—Герлаха: И — источник атомов водорода, К — коллиматор, М — магнит (D — расстояние, которое проходит пучок в магнитном поле с отличным от нуля $\frac{dH}{dz}$), Э — экран (d — расстояние между следами пучков), L — расстояние от магнита до экрана,

Или можно было бы поступить иначе. Рассказать об опыте, проделанном Эйнштейном и де Гаазом ** (1915 г.), непосредственно измерившими гиромагнитное отношение, которое оказалось в два раза больше предсказываемого теорией. А потом объяснить, что расхождение теории

*) *Задача.* На каком расстоянии L от магнита в опыте Штерна и Герлаха надо расположить экран, чтобы расстояние между следами пучков равнялось бы $0,0044$ мм? В опыте Штерна и Герлаха $dH/dz = 2,2 \cdot 10^5$ Э/см. Ширина области неоднородного поля $D = 10$ см (см. рис. 14), скорость атомов пучка равнялась 10^6 см/с.

**) Статьи Эйнштейна и Эйнштейна — де Гааза можно прочитать в уже цитировавшемся собрании сочинений А. Эйнштейна (т. III, с. 359—384). Эйнштейн и де Гааз измерили амплитуду крутильных колебаний стержня, возникавших в результате его перемагничивания. Для обострения методики они использовали резонанс между частотой перемагничивающего поля и частотой собственных колебаний стержня. Наверное, многих удивит, что Эйнштейн был не только теоретиком. Он сам «работал руками» — принимал активное непосредственное участие в эксперименте и даже создал учебное пособие для демонстрации гиромагнитного эффекта. С интересной историей открытия и дальнейшей судьбой гиромагнитного эффекта можно познакомиться по статье В. Я. Френкеля (УФН, 1979, т. 128, вып. 2, с. 545),

с экспериментом объясняется существованием у электрона *спина*.

К сожалению (повторим еще раз), события происходили не в логически удобной последовательности. Эйнштейн и де Гааз, по-видимому, из-за ошибки в расчете, получили значение гиромагнитного отношения, равное $\frac{e}{2m_e c}$, т. е. не обнаружили расхождения с теорией тех лет. Более того, их статья так и называется «Экспериментальное доказательство молекулярных токов Ампера». Подчеркнем: Эйнштейн прекрасно понимал, что гипотеза Ампера противоречит классической физике (см. примечание на стр. 20). Именно поэтому и был задуман эксперимент по наблюдению гиромагнитного эффекта. Он должен был подтвердить (и, по мнению авторов, подтвердил) существование молекулярных токов. Гиромагнитное отношение впоследствии неоднократно измерялось. Оно оказалось вдвое больше, чем следует из формулы (1.11).

Штерн и Герлах поставили свой опыт в 1921 г., когда о существовании у электрона *спина* уже подозревали. Подозрение возникло при анализе атомных спектров — главного источника сведений о структуре атомов в те годы.

Но что же такое спин? И какое отношение он имеет к физике магнитных явлений?

У квантовой частицы *), кроме момента количества движения, обязанного ее движению в пространстве (его называют *орбитальным* моментом количества движения, хотя ни о какой орбите, как мы помним, говорить нельзя), может существовать момент количества движения, присущий самой частице. Этот момент называют собственным (внутренним) моментом, или *спином*. Слово спин (spin) по-английски означает веретено, но представление о частице с отличным от нуля спином, как о шарике или волчке конечного радиуса, вращающегося вокруг своей оси, ни в какой мере, даже самой грубой, не соответствует действительности. Прежде всего потому, что вообще элементарной частице (напри-

*) Конечно, все частицы квантовые. Словосочетание «квантовая частица» подчеркивает, что речь идет о таких явлениях, при исследовании которых необходимо учитывать квантовые законы. Конкретно здесь под квантовой частицей следует понимать частицу, момент количества движения которой невелик по сравнению с \hbar .

мер, электрону) не удастся приписать конечный радиус. Многочисленные попытки оказывались неудачными, так как входили в противоречие с требованиями теории относительности. То, что спин не есть результат пространственного вращения частицы, наиболее отчетливо видно из следующего: значения проекции собственного момента количества движения частиц могут быть не только целыми (см. (1.23) и (1.24)), но и полуцелыми.

Величину спина мы будем обозначать буквой s (аналог l), а его проекцию буквой s с индексом z — s_z (аналог m).

Для электрона: $s = 1/2$; $s_z = \pm 1/2$; $2s + 1 = 2$.

Протоны, нейтроны и нейтрино тоже имеют спин, равный $1/2$. У фотона спин равен единице, а у всех π -мезонов (их три: нейтральный π^0 и два заряженных, π^+ и π^- с зарядами $\pm e$) спин равен нулю.

Как мы видим, существование собственного момента расширило возможные значения момента количества движения: спин может принимать целые ($s = 0, 1, 2$ и т. д.) и полуцелые ($s = 1/2, 3/2, 5/2$ и т. д.) значения. Нулевой спин причисляют к целым спинам.

Частицы с нулевым и целым спином называют *бозонами* (по имени индийского физика Бозе), а частицы с полуцелым спином — *фермионами* (по имени Ферми). Почему все частицы делят на два класса, мы поймем позже.

Спин элементарной частицы — присущее ей внутреннее свойство, как заряд и масса. Электрон или протон не могут расстаться со своим спином, как не могут потерять часть своего заряда или массы. Именно в этом и проявляется элементарность электрона, протона, нейтрона и других частиц, которые принято считать элементарными. Их элементарность не препятствует взаимным превращениям. Но это совсем другая тема.

Дирак построил теорию электрона, т. е. сформулировал уравнение, которому должна удовлетворять волновая функция электрона. Это уравнение (его так и называют — уравнением Дирака) учитывает не только волновые свойства электрона, но и требования теории относительности. Квантовую механику, согласующуюся с требованиями теории относительности, называют *релятивистской квантовой механикой*. При ее создании не знали частиц со спином, отличным от $1/2$. Дираку

казалось, что равенство спина половине — логическое следствие релятивистской квантовой теории. После открытия частиц со спином, отличным от $1/2$, было понято, что уравнение Дирака — не единственное возможное уравнение. Волновые функции частиц с $s \neq 1/2$ подчиняются уравнениям, отличающимся от уравнения Дирака, которое безукоризненно описывает свойства электрона — частицы со спином $1/2$.

Логическим следствием релятивистской квантовой механики заряженной частицы с зарядом e , массой m_e и спином $1/2$ оказалось существование у такой частицы магнитного момента, имеющего две проекции, равные $\pm \frac{e\hbar}{2m_e c}$. Сравните это выражение с формулой (1.25)! Видно, что для собственного спинового момента количества движения гиромагнитное отношение равно $\frac{e}{m_e c}$, т. е. вдвое больше, чем для орбитального момента. Классическое (орбитальное) гиромагнитное отношение в единицах $\frac{e}{2m_e c}$ мы будем обозначать g_L , а спинное g_s .

Подчеркнем: $g_s = 2$ в единицах $\frac{e}{2m_e c}$ при любом значении s (даже целом!). Букву g без индекса мы оставим для полного гиромагнитного отношения, учитывающего и орбитальный и спинový моменты. Его называют g -фактором, или фактором Ланде.

Как мы уже говорили, существование у электрона спина действительно объясняет и опыт Штерна—Герлаха, и опыт Эйнштейна — де Гааза. В обоих случаях проявился не орбитальный, а собственный момент количества движения электронов.

Т а б л и ц а I

Частица	Сим-вол	Масса, г	Спин	Магнитный момент, эрг/Гс
Электрон	e	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-28}$	$1/2$	$\frac{e\hbar}{2m_e c} = 0,9 \cdot 10^{-20}$
Протон	p	$m_p = 1,7 \cdot 10^{-24}$	$1/2$	$2,8 \frac{e\hbar}{2m_p} = 1,3 \cdot 10^{-23}$
Нейтрон	n	$m_n = 1,01 \cdot m_p$	$1/2$	$1,9 \frac{e\hbar}{2m_n c} = 0,9 \cdot 10^{-23}$

В небольшой таблице (табл. I) мы собрали сведения о спинах и магнитных моментах трех наиболее важных частиц — частиц, из которых построены все окружающие нас тела и мы сами.

То обстоятельство, что нейтрон, хотя он и нейтральный, обладает магнитным моментом, а магнитный момент протона в 2,8 раза больше, чем предсказывает формула Дирака, нашло свое объяснение в современной теории элементарных частиц.

В телах число электронов равно числу протонов, а собственный магнитный момент электрона во много раз больше магнитного момента протона. Ясно, что именно электроны играют главную роль в магнитных свойствах тел различной природы. Правда, удастся не только обнаружить и измерить магнитные моменты атомных ядер (хорошо известны магнитные моменты практически всех атомных ядер), но и исследовать магнитные свойства веществ, обусловленные существованием ядерных магнитных моментов. Часть физики магнитных явлений, занятая исследованиями магнитных свойств ядерных частиц, называется *ядерным магнетизмом*. О ядерном магнетизме мы, к сожалению, почти ничего не расскажем.

§ 8. *g*-фактор

Ну, вот, мы наконец добрались до элементарного магнетика. В подавляющем большинстве случаев элементарным магнетиком можно считать собственный магнитный момент электрона. Его проекция на ось равна (с точностью до знака) магнетону Бора $\mu = \frac{e\hbar}{2m_e c}$. Если электрон движется так, что его орбитальный момент отличен от нуля, магнитные моменты, орбитальный и спиновый, складываются. Но как складывать «квантовые векторы», т. е. векторы, обладающие дискретными значениями проекции на избранную ось? «Классические» векторы складывают по правилу параллелограмма. Для этого надо знать длину каждого вектора и угол между ними. Когда складывают «квантовые» векторы, поступают следующим образом.

Пусть есть два вектора, L_1 и L_2 , таких, что $L_1^2 = (l_1 + 1) l_1$, $L_2^2 = (l_2 + 1) l_2$, а l_1 , l_2 — целые или полуцелые числа. Спрашивается, каким может быть

вектор J , равный сумме L_1 и L_2 ? Для получения ответа спроектируем эти векторы на общую ось. Ясно, что максимальная и минимальная проекции суммы двух векторов есть $l_1 + l_2$ и $|l_1 - l_2|$. Это означает, что максимальная проекция вектора J , т. е. J может принимать значения от $|l_1 - l_2|$ до $l_1 + l_2$. Если запомнить выражение для квадрата вектора (см. стр. 34), то с «квантовыми» векторами можно оперировать почти как с классическими. Вычислим, чтобы попрактиковаться, возможные дискретные значения скалярного произведения $L_1 L_2$ через l_1 , l_2 и J . Для этого равенство

$$J = L_1 + L_2$$

возведем в квадрат (по обычным правилам), а для L_1^2 , L_2^2 и J^2 воспользуемся «квантовыми» выражениями:

$$J(J+1) = l_1(l_1+1) + l_2(l_2+1) + 2L_1 L_2,$$

т. е.

$$L_1 L_2 = \frac{1}{2} [J(J+1) - l_1(l_1+1) - l_2(l_2+1)]. \quad (1.31)$$

Подставляя вместо J его возможные значения от $|l_1 - l_2|$ до $l_1 + l_2$, получим набор возможных дискретных значений скалярного произведения $L_1 L_2$.

Векторы L_1 и L_2 могут относиться к одной частице (скажем, один из векторов — орбитальный момент, а другой — спиновый) или к разным (например, можно задать вопрос, чему равен момент двух частиц, если момент одной частицы L_1 , а другой L_2 ?).

Правило сложения векторов поможет нам выяснить, каким может быть спин системы, состоящей из нескольких электронов.

Начнем с двух электронов. Так как каждый из спинов может ориентироваться только по оси, либо против оси, то возможны только такие ситуации: 1) спины «антипараллельны» друг другу — суммарный спин равен нулю ($S = 0$); 2) спины «параллельны» друг другу — суммарный спин равен единице ($S = 1$).

Слова «параллельны» и «антипараллельны» взяты в кавычки, так как у спина электрона, как у всякого момента, две его проекции (s_x , s_y) не имеют определенного значения.

Между состояниями с $S = 0$ и $S = 1$ есть существенное различие. Состояние с нулевым спином — един-

ственное (его так и называют — синглет *)). Состояний же со спином, равным единице, может быть три: с $S_z = -1, 0$ и 1 . Это состояние называют триплетом **).

Чтобы еще более отчетливо почувствовать различие между классическими и квантовыми моментами, вычислим значение $s_1 s_2$ при $S = 0$ и при $S = 1$ (s_1 и s_2 — векторы спинов первого и второго электронов, $s_1 = s_2 = 1/2$). Заметим что спин, равный половине, наименьший из встречающихся в природе моментов, кроме нулевого, конечно. Для него отличие квантовых свойств от классических максимально ***).

Согласно формуле (1.31)

$$s_1 s_2 = \begin{cases} -3/4 & \text{при } S = 0, \\ 1/4 & \text{при } S = 1. \end{cases} \quad (1.32)$$

Если бы моменты были классическими, то произведения $s_1 s_2$ для «параллельных» и «антипараллельных» спинов отличались бы только знаком и равнялись бы $\pm s^2 = \pm 1/4$.

Какие значения имеют проекции спинов каждого электрона в синглетном и триплетном состоянии, видно

Т а б л и ц а II

$S = 0$		$\uparrow \downarrow - \downarrow \uparrow$
$S = 1$	$S_z = -1$	$\downarrow \downarrow$
	$S_z = 0$	$\uparrow \downarrow + \downarrow \uparrow$
	$S_z = 1$	$\uparrow \uparrow$

из табл. II (стрелка вниз изображает состояние отдельного электрона с $s_z = -1/2$, стрелка вверх — с $s_z = 1/2$).

Обратите, пожалуйста, внимание на то, что спиновая конфигурация может быть антисимметричной ($S = 0$) и симметричной ($S = 1$). Глядя на таблицу, нетрудно понять, что речь идет о перестановке

электронов. Понимание симметрии спиновых конфигураций поможет разобраться в таком важном для теории магнетизма понятии, как *обменная энергия*.

*) От латинского слова *singularis* — единственный.

**) От латинского слова *triplex* — тройной.

***) При $s = 1/2$ квадрат длины вектора $s(s+1) = 3/4$ второе больше квадрата проекции $s_z^2 = s^2 = 1/4$.

Три электрона, как легко сообразить, могут иметь спин, равный $1/2$ или $3/2$. Вообще четное число электронов создает конфигурации с целым спином (в частности, с нулевым), а нечетное число электронов — с полуцелым.

Рассмотрим теперь систему из нескольких электронов. Орбитальный момент электронов пусть равен L , а спиновый — S . Напомним, что задание моментов означает задание их длин L и S и проекций на выбранную ось L_z (одно из чисел: $-L, \dots, +L$) и S_z ($-S, \dots, +S$). Каким магнитным моментом будет обладать эта система электронов?

Если несколько уточнить вопрос, то ответ придет почти автоматически. Вращательные свойства системы характеризуются полным моментом количества движения $J = L + S$, максимальная проекция которого J , согласно предыдущему, может принимать значения от $|L - S|$ до $L + S$. Магнитный момент M пропорционален J , причем коэффициент пропорциональности мы назвали гиромагнитным отношением. Итак,

$$M = g\mu J, \quad \mu = \frac{e\hbar}{2m_e c}, \quad (1.33)$$

и задача сводится к отысканию величины g -фактора как функции L , S и J . Напомним, что задача возникла из-за того, что гиромагнитные отношения для орбитального и собственного моментов разные ($g_L = 1$, $g_s = 2$).

Учитывая различие g -факторов, для магнитного момента можно написать следующее выражение:

$$M = \mu(\bar{L} + 2\bar{S}) = \mu(\bar{J} + \bar{S}). \quad (1.33')$$

Черта над векторами L и S означает, что берутся их средние значения. Дело в том, что сохраняется (имеет определенное стационарное значение) только полный момент количества движения J (поэтому над ним нет черты), а векторы L и S прецессируют вокруг J (рис. 15). Нас, согласно формуле (1.33'), будет интересоваться вектор \bar{S} , который, естественно, направлен вдоль

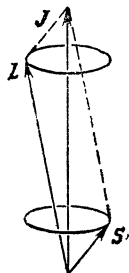


Рис. 15. Классическая картина «прецессии» орбитального L и спинного S моментов вокруг полного момента J .

вектора \mathbf{J}^*) (это отчетливо видно из рис. 15), т. е. $\bar{\mathbf{S}} = a\mathbf{J}$. Константу a легко определить из следующей цепочки равенств:

$$\overline{\mathbf{J}\mathbf{S}} = \mathbf{J}\bar{\mathbf{S}} = a\mathbf{J}^2 = aJ(J+1).$$

Заметьте: для \mathbf{J}^2 мы опять воспользовались квантовой формулой. Значение $\mathbf{J}\mathbf{S}$ вычисляется совершенно аналогично тому, как была получена формула (1.31):

$$\mathbf{J}\mathbf{S} = \frac{1}{2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)].$$

Следовательно,

$$a = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{L(L+1) - S(S+1)}{J(J+1)} \right].$$

Сравнивая формулы (1.33) и (1.33'), получаем искомого выражение для g -фактора:

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}. \quad (1.34)$$

Если спин отсутствует ($S = 0$), то, естественно, $J = L$ и $g = 1$; если же $L = 0$, а $J = S$, то $g = 2$. При $J = 0$, что возможно при $L = S$, выражение (1.33) не определено, но, конечно, никакого магнитного момента нет, так как все проекции вектора \mathbf{M} равны нулю.

Фактор Ланде g может быть равным нулю и при $J \neq 0$, например, при $L = 2$, $S = 3/2$ и $J = 1/2$. Этот пример показывает, что g -фактор отнюдь не «располагается» между единицей и двойкой.

Подведем итог: если система электронов имеет определенный полный момент количества движения \mathbf{J} , являющийся суммой орбитального \mathbf{L} и спинowego \mathbf{S} моментов, то магнитный момент такой системы электронов равен «квантовому» вектору \mathbf{M} (см. (1.33)), проекции которого на избранную ось есть $\mu_B \bar{m}_J$, где m_J принимает одно из следующих значений: $-J$, $-J+1$, ..., $J-1$, J , а g -фактор определен формулой (1.34).

*) Забыв на время о «квантованности» вектора \mathbf{S} , разложите его на два вектора: один направлен вдоль вектора \mathbf{J} , а второй — \mathbf{S}_\perp , ему перпендикулярный, вращается вокруг \mathbf{J} . Поэтому $\bar{\mathbf{S}}_\perp = 0$.

§ 9. Строение атомов

Все атомы, кроме простейшего, — атома водорода, — содержат более одного электрона. Атомы веществ, обладающих ярко выраженными магнитными свойствами (например, атомы переходных элементов) — сложные многочастичные системы. Точные сведения о движении системы, состоящей из большого числа частиц, получить нельзя. Даже в классической механике точно решается только задача о движении двух частиц. Однако оказывается, что для объяснения (во всяком случае, качественного) свойств атомов достаточно понимать весьма общие черты движения электронов в атоме. К их описанию мы сейчас и приступим.

Мысленно надо представлять себе периодическую систему Менделеева, в которой элементы расположены по атомному номеру Z , т. е. по числу электронов в электронной оболочке или по числу протонов в ядре. Наша ближайшая задача заключается в том, чтобы понять, почему атомы с разными Z имеют разные свойства и, наоборот, почему атомы, расположенные в аналогичных местах таблицы Менделеева (их Z , конечно, различны), обладают похожими свойствами. Конечно, основное внимание мы будем обращать на магнитные свойства атомов.

Теперь представим себе атом: ядро — неподвижный *) «сгусток» протонов и нейтронов, источник силового поля, в котором движутся электроны. Чем объясняется, что добавление одного электрона к восемнадцати превращает атом инертного газа аргона в атом металла калия?

Начнем с того, что уточним, какие силы действуют на электроны.

Казалось бы, ответ ясен — электростатические кулоновские силы притяжения к ядру и силы отталкивания электронов друг от друга (мы уже говорили об этом). Но после того, как мы постарались убедить читателя (и, надеюсь, убедили), что каждый электрон несет на себе не только заряд, но и является маленьким магнитиком (магнитным диполем), вопрос о силах приобретает новый смысл: надо ли, исследуя движение электро-

*) Мы перешли в систему координат, в которой ядро покоится.

нов, учитывать их магнитное взаимодействие друг с другом и с ядром?

Прежде всего — что такое «магнитное взаимодействие»? Результат его известен всем: разноименные полюсы магнитов отталкиваются, а разноименные притягиваются. Ответ на вопрос «что такое...» означает вывод зависимости силы от расстояния между магнетиками (магнитными диполями). В отличие от электростатических сил, которые зависят только от расстояния между зарядами, магнитные силы зависят не только от расстояния между диполями, но и от положения «магнитных стрелочек» относительно друг друга и относительно

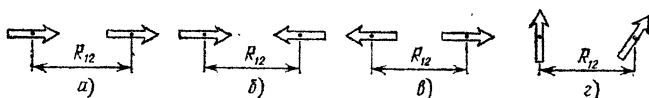


Рис. 16. Сила взаимодействия магнитных диполей зависит не только от расстояния между ними, но и от их ориентации: а) магнитные диполи притягиваются ($U_M < 0$) б, в) отталкиваются ($U_M > 0$), г) знак энергии U_M определяется формулой (1.35).

линии, их соединяющей (рис. 16). Мы не будем заниматься выводом выражения для силы взаимодействия между магнитными диполями, справедливой на расстояниях, больших по сравнению с размерами диполя. Для электронов эта формула точна, так как электроны следует считать точечными частицами. Мы приведем выражение не для силы, а для энергии взаимодействия U_M :

$$U_M = \frac{(M_1 M_2) - 3(M_1 n_{12})(M_2 n_{12})}{R_{12}^3}; \quad n_{12} = \frac{R_{12}}{R_{12}}. \quad (1.35)$$

Здесь M_1 и M_2 — магнитные моменты двух частиц, R_{12} — векторное расстояние между ними. Отсчет энергии выбран так, чтобы она равнялась нулю при бесконечном удалении магнитных диполей друг от друга (при $R_{12} \rightarrow \infty$).

Из формулы (1.35) ясно, что она правильно описывает притяжение разноименных полюсов (т. е. магнитных диполей, параллельных друг другу и линии, их соединяющей) и отталкивание одноименных (т. е. антипарал-

лельных магнитиков, расположенных вдоль соединяющей их линии) *).

Когда речь идет об электронах в атоме, то магнитная энергия взаимодействия между двумя частицами по порядку величины есть

$$U_M \approx \frac{\mu^2}{a^3},$$

где μ — магнетон Бора, а a — среднее расстояние между электронами, равное, приблизительно, размеру атома (это та же формула, что (1.35); мы заменили $M_{1,2} \rightarrow \mu$, $R_{12} \rightarrow a$ и опустили угловую зависимость в числителе).

Оценивать энергию магнитного взаимодействия электрона с ядром нет смысла: она заведомо значительно меньше, чем U_M , так как магнитный момент ядра в тысячи раз меньше магнитного момента электрона — он складывается из магнитных моментов протонов и нейтронов, а они в тысячи раз меньше электронного (см. табл. I).

Энергия электростатического взаимодействия между двумя электронами в этих же условиях равна

$$U_{кул} = \frac{e^2}{a}.$$

Деля выражение для U_M на выражение для $U_{кул}$ и опуская множители порядка единицы, имеем

$$\frac{U_M}{U_{кул}} \approx \frac{(\hbar^2/a^2 m_e)}{m_e c^2}.$$

Это — довольно многозначительная формула! В знаменателе стоит энергия покоя электрона $m_e c^2$, а в числителе — непривычная комбинация размерности энергии (проверьте это утверждение!). Понять, что это за комбинация, можно двумя путями. Во-первых, обратиться к формуле (1.21) для энергии электрона в атоме водорода, выразив ее через радиус «орбиты» $a_n = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} n^2$ (стр. 32).

Видно, что по порядку величины $\frac{\hbar^2}{a^2 m_e}$ есть $|\epsilon_n|$ — энергия электрона в атоме. Во-вторых, воспользоваться

*) *Задача.* Выведите формулу (1.35). Это можно сделать, воспользовавшись формулой (1.26) для энергии магнитного диполя в магнитном поле, считая, что поле H создано другим диполем (см. формулу (1.7)).

соотношениями неопределенностей (§ 4), согласно которым ограничение частицы областью пространства порядка a невозможно, если частица не движется. Наименьший импульс частицы, находящейся в области порядка a , есть $p \approx \frac{\hbar}{a}$. Следовательно, $\frac{\hbar^2}{a^2 m_e} = \frac{p^2}{m_e}$ есть кинетическая энергия движения электрона в атоме $E_{\text{кин}}$ (по порядку величины, конечно, — даже двойку мы опустили). Второй подход, возможно, менее убедителен, но он показывает, что $\frac{\hbar^2}{a^2 m_e}$ характеризует энергию движения любого электрона в любом атоме, а не только в атоме водорода. Для оценки размеров атома можно с хорошей точностью использовать величину $a \approx \approx 3 \cdot 10^{-8}$ см, которой мы и будем пользоваться в дальнейшем. Другими словами,

$$\frac{U_M}{U_{\text{кул}}} \approx \frac{E_{\text{кин}}}{m_e c^2} = \frac{v^2}{c^2}, \quad v = \frac{\hbar}{am_e}.$$

Электроны в атомах движутся со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света *). Действительно, разделив средний импульс $\hbar/a = 10^{-27}/3 \cdot 10^{-8}$ на массу электрона $m_e \approx 10^{-27}$ г, убеждаемся, что $v \approx \approx 3 \cdot 10^7$ см/с, что значительно меньше скорости света.

Итак, отношение $U_M/U_{\text{кул}}$ много меньше единицы, т. е. энергия магнитного взаимодействия U_M значительно меньше энергии электростатического взаимодействия $U_{\text{кул}} : U_M \ll U_{\text{кул}}$. Этот вывод столь важен для дальнейшего, что мы придадим отношению $U_M/U_{\text{кул}}$ еще более «впечатляющую» форму, подставив вместо a выражение для «радиуса» атома водорода в основном состоянии $a_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ (см. стр. 32). Тогда

$$\frac{U_M}{U_{\text{кул}}} \approx \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \approx \left(\frac{1}{137} \right)^2. \quad (1.36)$$

Неожиданно неравенство $U_M \ll U_{\text{кул}}$ оказалось следствием малости (!) электрического заряда (см. стр. 11).

Надо сказать, что роль безразмерных комбинаций, составленных из мировых констант (в данном случае из e , \hbar и c), необычайно велика. Можно сформулировать такое полухулиганское утверждение: наш мир таков, каков

*) Правда, в тяжелых многоэлектронных атомах есть электроны (они движутся в глубине атома, вблизи его ядра), скорость которых близка к скорости света,

он есть, именно из-за того, что несколько безразмерных комбинаций мировых постоянных имеют те значения, какие они имеют: $\frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$; $\frac{m_e}{m_p} \approx \frac{1}{1840}$; $\frac{e^2}{\gamma m_p^2} \approx 4 \cdot 10^{42}$ и т. д. Что означают эти цифры? Почему они именно такие? На этот вопрос наука пока ответить не может.

Итак, мы выяснили, что определяющую роль играет электростатическое взаимодействие между электронами. Другими словами, при «построении» атома из электронов можно не учитывать тот важный для нашей темы факт, что электроны — магнетики. Сразу оговоримся: отмахнуться от существования у электрона спина нельзя и мы в этом скоро убедимся.

Для выяснения общей картины движения электронов в атоме можно считать, что *средняя* сила, действующая на каждый электрон со стороны ядра и всех остальных электронов (кроме рассматриваемого), обладает центральной симметрией (центр симметрии совпадает с ядром). Стационарное состояние каждого электрона в таком поле можно характеризовать определенным моментом количества движения, величина которого задается квантовыми числами l ($l = 0, 1, 2, \dots$) и m ($m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$; см. выше). Оказывается, этих чисел недостаточно для задания состояния электрона. Приходится вводить еще одно число, определяющее состояние электрона, его называют главным квантовым числом и обозначают буквой n ; оно принимает значения 1, 2, 3, ... Тройка чисел (n, l и m) определяет состояние орбитального движения электрона в атоме. Напомним, что свободное движение электрона определяют тоже три числа — три проекции его импульса. Числа l и n не вполне независимы: всегда $l \leq n - 1$.

Спиновое состояние электрона определяется значением проекции его спина на какую-либо ось. Обозначим величину проекции спина буквой σ ; σ принимает два значения: $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$. Итак,

состояние электрона в атоме определяется четырьмя числами, n, l, m, σ :

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, \dots; \\ l &= 0, 1, 2, \dots, n-1; \\ m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l; \\ \sigma &= -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Энергия электрона слабо зависит от двух из четырех квантовых чисел — от m и σ . В первом приближении эту зависимость вовсе можно не учитывать. Это значительно облегчает описание строения атома. Пренебрежение зависимостью энергии электрона от m и σ — следствие пренебрежения магнитным взаимодействием (см. (1.35)), а также (и главным образом!) изотропии пространства, окружающего электронную оболочку атома. Действительно, какая разница, куда направлен момент количества движения, если все направления равноправны? А ведь за направление момента «отвечает» величина его проекции m . Это утверждение имеет классическую аналогию: энергия частицы, движущейся в поле с центральной симметрией, не зависит от ориентации ее траектории в пространстве.

Малым n и l соответствует малая энергия $\epsilon(n, l)$, с ростом n и l энергия, как правило, растет. Для атома водорода мы приводили зависимость $\epsilon = \epsilon(n)$ (см. формулу (1.21)). По случайным (в какой-то мере) обстоятельствам у атома водорода энергия не зависит от l .

Состояния с различными значениями l вне зависимости от значения n принято (по исторической традиции) обозначать малыми буквами латинского алфавита со следующим соответствием:

$s\ p\ d\ f\ g \dots$ далее по алфавиту:

$l = 0\ 1\ 2\ 3\ 4 \dots$

Состояние отдельного электрона в атоме (без указания значений m и σ) обозначается символом, состоящим из цифры, указывающей значение главного квантового числа n , и буквы, соответствующей значению l . Символ $3p$, например, означает состояние электрона с $n = 3$ и $l = 1$. Если несколько электронов находятся в состоянии с одинаковыми n и l , то это принято обозначать в виде показателя степени (*единица не ставится*). Так, $3p^2$ обозначает, что в состоянии $3p$ ($n = 3, l = 1$) находятся два электрона.

Распределение электронов в атоме определяет *электронную конфигурацию* атома — его электронную оболочку. Всякая ли конфигурация возможна? В частности, сколько электронов могут находиться в состояниях с одними и теми же n и l ? Какова максимальная «степень» в символах типа $3p$ или $4d$?

В классической физике такой вопрос сводился бы к тому, сколько одинаковых частиц могут иметь одинаковые энергии и моменты? Естественно сразу ответить: сколько угодно. В квантовой физике дело обстоит совершенно иначе. И вот почему.

Принцип запрета Паули

Одинаковые частицы в классической и квантовой физике ведут себя совершенно по-разному. Классические частицы, даже абсолютно одинаковые, движутся каждая по своей траектории. Если в начальный момент времени положение каждой из частиц было зафиксировано, то в любой последующий момент, зафиксировав снова частицы в пространстве, — на их траекториях, можно указать, где какая частица находится, т. е. отличить одну от другой. В квантовой механике ситуация совсем иная, так как частицы движутся не по траекториям. Зафиксировав частицу в начальный момент времени, мы принципиально не имеем возможности найти ее среди ей подобных в последующие моменты времени.

В квантовой механике одинаковые частицы совершенно неразличимы

Такое утверждение составляет содержание принципа тождественности одинаковых частиц *). Из принципа тождественности следует, что перестановка одинаковых частиц не приводит к изменению квантового состояния системы.

Рассмотрим волновую функцию двух частиц $\Psi(1, 2)$. Цифры 1 и 2 символически обозначают координаты (с учетом переменной, указывающей направление спина) первой и второй частиц. Перестановка двух частиц (первая частица становится на место второй, вторая — на место первой) описывается перестановкой аргументов у функции $\Psi(1, 2)$:

$$\Psi(1, 2) \rightarrow \Psi(2, 1).$$

При такой операции состояние системы не должно измениться. Но это означает, что при перестановке волновая функция может только приобрести постоянный множи-

*) Какое облегчение для построения картины Мира! Построив теорию *одного* электрона, мы создали теорию *любого* электрона,

тель (см. стр. 30). Обозначим его буквой α . Тогда $\Psi(2, 1) = \alpha \Psi(1, 2)$. Проведя перестановку частиц два раза, т. е. вернувшись к их исходному расположению, убеждаемся, что $\alpha^2 = 1$ и, следовательно, либо $\alpha = 1$, либо $\alpha = -1$. Значение множителя α определяется состоянием системы, а типом частиц, составляющих систему.

Так как множитель α равен или $+1$, или -1 , то существуют два типа частиц:

для одних перестановка не приводит к изменению волновой функции:

$$(B) \quad \Psi(2, 1) = \Psi(1, 2); \quad (1.37)$$

для других при перестановке частиц волновая функция меняет знак:

$$(F) \quad \Psi(2, 1) = -\Psi(1, 2). \quad (1.38)$$

Мы описали сейчас свойство частиц, не имеющее никакого классического аналога. Квантовая механика привела к открытию свойств, не связанных с силовым взаимодействием между частицами; частицы могут даже не взаимодействовать друг с другом, но выписанные выше перестановочные законы должны *обязательно* выполняться. Природа (квантовая механика) диктует частицам правила поведения в коллективе — ведь ясно, что, обобщая соотношения (1.37) и (1.38), мы можем рассматривать совокупности любого числа частиц. Часть физики, занимающаяся исследованием поведения больших (макроскопических) совокупностей частиц, носит название *статистической физики*. О частицах, для которых выполняется соотношение (1.37), говорят, что они подчиняются *статистике Бозе—Эйнштейна*, а о частицах, для которых выполняется соотношение (1.38), — *статистике Ферми—Дирака*. Поэтому слева от равенств (1.37) и (1.38) поставлены буквы (Б) и (Ф).

Есть ли у частицы какое-либо «личное» свойство, которое определяет ее подчиненность одной из двух статистик? Оказывается есть. Как показал Паули,

частицы с нулевым и целым спином подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна, частицы с полуцелым спином — статистике Ферми—Дирака.

Становится понятным, почему частицы с целым или нулевым спином были названы бозонами, а частицы с полуцелым спином — фермионами (см. стр. 42).

Теперь вернемся к вопросу о том, сколько электронов может находиться в одном состоянии. Во-первых, напомним, что у электрона спин равен половине и, следовательно, *электроны — фермионы*. И, во-вторых, сформулируем один из фундаментальных принципов атомной физики — *принцип запрета Паули*:

в каждом состоянии может находиться не более одного электрона.

Сейчас мы докажем принцип запрета Паули, используя антисимметрию волновой функции двух электронов. К тому, что мы знаем о волновой функции (стр. 30), надо добавить: волновая функция двух невзаимодействующих частиц строится в виде билинейной комбинации волновых функций отдельных частиц. Итак, пусть один электрон находится в состоянии $\{n, l, m, \sigma\} \equiv \{i\}$, а другой в состоянии $\{n', l', m', \sigma'\} \equiv \{i'\}$. Тогда, в согласии с правилом (1.38),

$$\Psi(1, 2) = \Psi_{\{i\}}(1) \Psi_{\{i'\}}(2) - \Psi_{\{i'\}}(1) \Psi_{\{i\}}(2).$$

Отсюда: если состояния $\{i\}$ и $\{i'\}$ совпадают ($\{i\} \equiv \{i'\}$), волновая функция тождественно равна нулю — такого состояния нет.

Мы видим, что фермионы — индивидуалисты, они не терпят себе подобных.

Каждая физическая система стремится находиться в состоянии с наименьшей энергией *). Это обстоятельство плюс принцип Паули позволяют понять структуру атомов и вместе с этим — природу периодического закона Менделеева. По сути, задача сводится к расположению Z электронов атома с атомным номером Z по состояниям, учитывая, что:

1) состоянием с различными m и σ , но одинаковыми n и l отвечает одинаковая энергия, и

2) полный набор квантовых чисел $\{n, l, m, \sigma\}$ может иметь только один электрон.

Число состояний с определенным значением l равно $2(2l + 1)$. Так как l не может быть больше $n - 1$, то каждому значению n соответствует всего несколько l : при $n = 1$ только $l = 0$ (s -состояние), при $n = 2$ имеем $l = 0$ и $l = 1$ — s - и p -состояния и т. д. Легко подсчитать, сколько электронов могут иметь совпадающие

*) К этому утверждению мы еще вернемся в следующей главе.

n и l при произвольных их значениях *) и составить таблицу.

Таблица III показывает распределение числа состояний по группам с определенными n и l . Сравнение этой

Т а б л и ц а III

1s	2 электрона
2s, 2p	8 »
3s, 3p	8 »
4s, 3d, 4p	18 »
5s, 4d, 5p	18 »
6s, 4f, 5d, 6p	32 »
7s, 6d, 5f . . .	

таблицы с периодической системой Менделеева показывает, что периоды периодической системы — следствие последовательного заполнения электронами состояний с разными n и l , расположенных по группам. Первая группа заполняется в атомах H и He. В He заполнена

одна оболочка. Заполнение второй и третьей соответствует двум первым (малым) периодам периодической системы, содержащим по восемь элементов (они заканчиваются на He и Ar). Далее — два больших периода по 18 элементов (до Kr и Xe соответственно) и большой период, содержащий 32 элемента (до Rn); последняя группа состояний только начинает заполняться в существующих элементах.

Повторение химических свойств атомов при переходе от периода к периоду связано с тем, что в химических свойствах наиболее существенную роль играют внешние электроны — электроны, находящиеся вне полностью заполненной оболочки (мы, к сожалению, не можем на этом подробно останавливаться).

Порядок расположения состояний в табл. III, соответствующий последовательности их заполнения электронами, конечно, связан с зависимостью энергии электронов от n и l . Глядя на первые строки таблицы, можно сформулировать простое правило: сначала заполняются состояния с наименьшими n и всеми допустимыми l , а потом происходит переход к следующему n . Однако в четвертой строке и во всех последующих дело обстоит не так просто. Например, раньше (по таблице) должны заполняться состояния 4s, а потом 3d. В действительности, если взглянуть на электронные конфигурации группы железа (от Sc до Ni), то видно, что идет соревнование между заполнением 4s и 3d оболочек: напри-

*) Электроны с одинаковыми n и l образуют «оболочку».

мер, после V, у которого три электрона в состоянии $3d$ и два в $4s$, идет Cr, у которого пять электронов в состоянии $3d$ и один в $4s$, а у Mn при пяти электронах в состоянии $3d$ два в состоянии $4s$.

Чтобы приблизиться к теме нашего рассказа о магнитных свойствах, заметим, что совокупности электронов, полностью заполняющих группу состояний с заданными n и l , обладают суммарным нулевым моментом, как орбитальным, так и спинным. Это связано с тем, что для заполнения необходимо использовать электроны с противоположными проекциями моментов (см. стр. 35).

Для примера в табл. IV приведены электронные конфигурации нескольких элементов.

Таблица IV

Элемент	Z	Конфигурация	Терм
H	1	$1s$	$2S_{1/2}$
He	2	$1s^2$	$1S_0$
Li	3	$1s^2 2s$	$2S_{1/2}$
Be	4	$1s^2 2s^2$	$1S_0$
B	5	$1s^2 2s^2 2p$	$2P_{1/2}$
.....			
Al	13	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p$	$2P_{1/2}$
.....			
Ar	18	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$	$1S_0$

В последнем столбце таблицы расположен символ (терм), в котором собраны нужные сведения о свойствах электронной конфигурации данного атома в основном состоянии. Структура символа такова: латинская большая буква обозначает полный орбитальный момент электронной конфигурации со следующим соответствием (ср. со стр. 54):

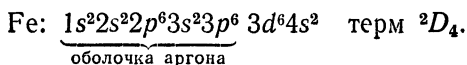
$S \ P \ D \ F \dots$ далее по алфавиту:
 $L = 0 \ 1 \ 2 \ 3 \dots$

Индекс внизу обозначает величину полного момента J , индекс наверху — мультиплетность, т. е. значение $2S+1$, где S — полный спин электронов атома. У Be терм 1S_0 , т. е. $L=0$, $J=0$, $S=0$; у Al терм $^2P_{1/2}$, т. е. $L=1$, $J=1/2$, $S=1/2$.

Глядя на терм атома, по сформулированному выше правилу легко вычислить g -фактор и определить магнитный момент атома.

Разработаны достаточно точные расчетные методы, существуют сравнительно простые правила (правила Хунда), позволяющие определить термы всех атомов. Тем самым *квантовая механика решила вопрос о магнитных моментах мельчайших структурных единиц вещества — атомов*. Хотя среди атомов встречаются такие, у термов которых справа стоит нуль, т. е. $J=0$ (например, у всех атомов инертных газов), у большинства атомов есть отличный от нуля полный момент и, следовательно, они — микроскопические магнетики.

В заключение этого параграфа приведем электронную структуру «самого магнитного» атома — атома железа (феррума) Fe, по имени которого получило свое название «самое магнитное» свойство — *ферромагнетизм*



§ 10. Обменная энергия

Рассмотрим термы атомов. Например, электронная конфигурация Mn ($Z=25$) такова: оболочка Ar + $3d^5 4s^2$, а его терм $^6S_{5/2}$. Почему спин электронов марганца равен $5/2$? Ведь ясно, что принцип Паули не запрещает электронам иметь и другие проекции спинов. Что заставило все пять электронов выстроиться «параллельно»?

Другой пример не из теории атома, а из теории молекул. Простейшая молекула — молекула водорода H_2 . Два электрона движутся вокруг двух протонов, создавая устойчивую конфигурацию. Два электрона могут иметь спин S , равный 1 или 0. Электроны в H_2 имеют спин, равный нулю. Почему? Эти вопросы требуют ответа и ответ этот нетривиален. Дело в том, что *причина осуществления той или другой спиновой конфигурации не связана с магнитным взаимодействием электронов*,

хотя ясно, что выбор спиновой конфигурации определяется энергетической выгодностью: осуществляется та, которая обладает меньшей энергией.

В начале предыдущего параграфа мы показали, что магнитное взаимодействие мало и им можно без существенных потерь пренебречь. Но в таком случае остается только электростатическое взаимодействие, которое не чувствительно к спиновому состоянию электронов. Действительно, электроны, спины которых «параллельны», и электроны, спины которых «антипараллельны», отталкиваются друг от друга с одинаковой силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Почему же спин у электронов марганца равен $5/2$, а у электронов в молекуле водорода — нулю? Казалось бы, не должно быть никакой связи между энергией электронной системы и ее спином, во всяком случае до тех пор, пока мы не учтем магнитное взаимодействие. В действительности, связь есть. Она возникает из-за антисимметрии волновой функции электронов.

Рассмотрим для простоты систему, состоящую из двух электронов, связанных только электростатическими силами. Пренебрежение магнитным взаимодействием означает, что, решая задачу об энергии системы, мы можем вообще забыть о спинах электронов. Пусть $\psi(r_1, r_2)$ — волновая функция, описывающая *орбитальное* движение электронов. Мы подчеркнули это, явно выписав аргументы волновой функции — координаты электронов r_1 и r_2 ; спиновые переменные опущены. Совсем забывать о спиновых переменных нельзя, так как полная волновая функция $\Psi(1, 2)$ должна быть антисимметричной (см. (1.38)). Нам придется ограничиться констатацией того, что полная волновая функция $\Psi(1, 2)$ есть произведение спиновой функции $S(\sigma_1, \sigma_2)$, описывающей спиновое состояние электронов (σ_1, σ_2 — спиновые переменные), и орбитальной $\psi(r_1, r_2)$, описывающей их орбитальное движение:

$$\Psi(1, 2) = S(\sigma_1, \sigma_2) \psi(r_1, r_2).$$

Мы видели (см. табл. II на стр. 46), что спиновая конфигурация может быть симметричной (при $S = 1$) или антисимметричной (при $S = 0$). Но вся функция $\Psi(1, 2)$ — антисимметрична. Следовательно, симметричной спиновой функции соответствует антисимметрич-

ная орбитальная, и наоборот. Отсюда вытекает следующее утверждение:

при $S = 0$ $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_s$ — симметричная функция,
 при $S = 1$ $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_a$ — антисимметричная функция.

Симметричные и антисимметричные функции ψ_s и ψ_a описывают *разные* орбитальные движения электронов и поэтому им отвечают разные энергии. Какая энергия окажется меньше, зависит от конкретной задачи. В молекуле водорода минимальная энергия соответствует симметричной волновой функции, описывающей орбитальное движение. Именно поэтому электронный спин у H_2 равен нулю.

Полученному здесь результату — зависимости энергии системы электронов от симметрии волновой функции, а, как следствие, — от спина, — можно придать форму, которая позволит говорить о своеобразном *обменном взаимодействии между электронами*.

Обозначим через E_s энергию электронов, соответствующую волновой функции ψ_s , а через E_a — энергию, соответствующую ψ_a . Из сказанного выше существует соответствие между энергией системы и ее спином:

$$E_s \leftrightarrow S = 0,$$

$$E_a \leftrightarrow S = 1.$$

Мы составим из спинов электронов выражение (оно носит название *спинового гамильтониана* и обозначается \mathcal{H}_S^*), которое при $S = 0$ принимает значение E_s , а при $S = 1$ — значение E_a .

Для этого воспользуемся формулой (1.32):

$$\mathcal{H}_S = \frac{1}{4} (E_s + 3E_a) + (E_a - E_s) s_1 s_2.$$

Значения, которые принимает спиновый гамильтониан \mathcal{H}_S , суть возможные значения энергии системы из двух электронов (те самые E_s и E_a , о которых сказано выше). Первое слагаемое $\frac{1}{4} (E_s + 3E_a) \equiv \bar{E}$ не зависит от спина системы и, как легко убедиться, есть усредненное по воз-

*) Гамильтониан — квантовый аналог функции Гамильтона. Функция Гамильтона — энергия, выраженная через импульсы и координаты. Для движения свободной частицы энергия равна $\frac{1}{2}mv^2$,

а функция Гамильтона есть $\frac{p^2}{2m}$ ($p = mv$ — импульс, v — скорость).

можным спиновым состояниям значение энергии (три состояния с $S = 1$ и одно с $S = 0$), а второе слагаемое зависит от спина системы электронов. Разность $E_a - E_s$ принято записывать в виде некоторого параметра A со знаком минус. Тогда спиновому гамильтониану двух электронов можно придать вид

$$\mathcal{H}_S = E - A s_1 s_2. \quad (1.39)$$

Такая запись позволяет связать энергетическую выгодность состояний с $S = 0$ и $S = 1$ со знаком параметра A . При $A < 0$ выгодно «антипараллельное» расположение спинов, а при $A > 0$ — «параллельное». Параметр A называют *обменным интегралом*, а второе слагаемое в (1.39) — обменной энергией или *обменным взаимодействием*.

Поясним происхождение терминов. Эпитет «обменный» возник из-за того, что симметричная и антисимметричная волновые функции описывают состояние электронов, меняющихся своими местами. Более того, параметр A есть мера частоты перемены мест. Его называют *обменным интегралом*, так как для вычисления параметра A необходимо проинтегрировать определенные выражения, содержащие волновые функции. Термин *обменное взаимодействие* *) подчеркивает, что структура спинового гамильтониана такова, будто между двумя электронами существует какое-то специфическое силовое взаимодействие, величина которого зависит от взаимного расположения спинов электронов. В этом смысле оно напоминает магнитное взаимодействие. Мерой интенсивности служит обменный интеграл A .

Подчеркнем несколько очень важных для дальнейшего обстоятельств.

1) Обменное взаимодействие изотропно. Поворот всех спинов на один и тот же угол не изменяет значения обменной энергии. Это, в частности, видно из того, что в формулу (1.39) входит скалярное произведение спинов, не меняющееся при повороте обоих спинов на один и тот же угол.

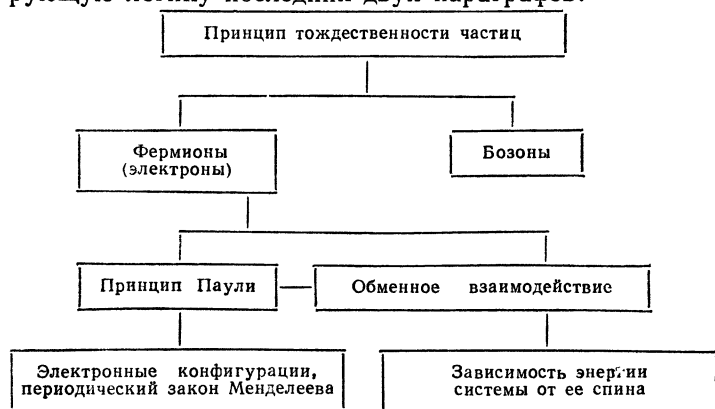
*) Не можем воздержаться, чтобы не привести замечание Бернарда Шоу, имеющее «прямое отношение» к обменному взаимодействию: «Если у Вас есть яблоко, и у меня есть яблоко, и если мы обмениваемся этими яблоками, то у Вас и у меня остается по одному яблоку. А если у Вас есть идея и у меня есть идея, и мы обмениваемся этими идеями, то у каждого из нас будет по две идеи.»

2) Интенсивность обменного взаимодействия A определяется величиной электростатической энергии электронов и поэтому не мала, хотя, как правило, $|A|$ все же несколько меньше, чем средняя энергия электростатического взаимодействия (в наших обозначениях $|A| < E$).

3) Знак обменного интеграла, согласно сказанному выше, может быть и положительным, и отрицательным. Когда речь идет о внутриатомном обменном взаимодействии, чаще всего $A > 0$ (что зафиксировано одним из правил Хунда); при межатомном взаимодействии чаще встречаются ситуации с $A < 0$, хотя случаи $A > 0$ не просто существуют, но и служат объяснением наиболее яркого магнитного свойства — ферромагнетизма.

В случае межатомного обменного взаимодействия (когда взаимодействующие электроны принадлежат разным атомам) обменный интеграл A существенно зависит от расстояния между атомами, резко (экспоненциально) уменьшаясь при удалении атомов друг от друга на расстояние, превосходящее размер атома. Доказать, это, конечно, можно, только подставив конкретные волновые функции в конкретный обменный интеграл, а представить себе, наверное, не так трудно, если вспомнить, что обменное взаимодействие — результат обмена местами электронов *).

В заключение приведем небольшую схему, фиксирующую логику последних двух параграфов:



*) Подобные заявления не должны внушать иллюзию понимания. Хотелось бы заинтересовать читателя. Возможно, пробудившийся интерес заставит более подробно изучить предмет, что в дальнейшем и приведет к пониманию.

ПАРАМАГНЕТИЗМ И ДИАМАГНЕТИЗМ

От мельчайших кирпичиков вещества мы переходим к макроскопическим телам и попытаемся рассказать об их магнитных свойствах. Даже в специальных монографиях не перечисляют свойства *всех* веществ. Этого нельзя сделать — веществ слишком много. Но еще в древности было известно, что наука начинается с систематизации. Надо помнить, что всякая систематизация условна, требует оговорок, дополнений, разъяснений и исключений. Хороший пример нелогичности *удобной* систематизации любил приводить советский физик Я. Г. Дорфман: «Обувной магазин делится на отдели мужской, женской и сезонной обуви».

Магнитные свойства вещества допускают простую и логичную систематизацию. Все они либо диамагнетики, либо парамагнетики. Фраза: «все вещества делятся на парамагнетики и диамагнетики» станет безукоризненной, если добавить: «при высоких температурах».

Итак:

все вещества при высоких температурах либо диамагнетики, либо парамагнетики.

Остается объяснить, что такое парамагнетизм и диамагнетизм, а также рассказать о магнитных свойствах веществ при *низких* температурах.

§ 1. Магнитная восприимчивость

Если между полюсами магнита или внутри соленоида, по которому течет ток, поместить какое-либо вещество, то магнитные силовые линии несколько перераспределятся по сравнению с тем их распределением, когда между полюсами магнита или внутри соленоида ничего нет (рис. 17). Под действием магнитного поля все вещества намагничиваются. Это означает, что

каждый элемент объема тела ведет себя как магнетик, а магнитный момент всего тела есть векторная сумма магнитных моментов всех элементов объема. Мерой намагниченности тела служит плотность \mathcal{M} магнитного момента. Размерность \mathcal{M} определяется из того факта,

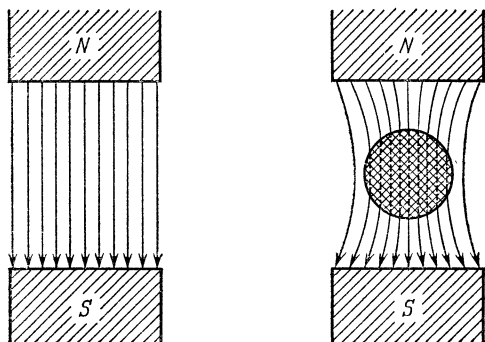


Рис. 17. Магнитные силовые линии перераспределяются, если между полюсами магнита внести тело,

что $\mathcal{M}V$, где V — объем тела, есть магнитный момент M . Легко убедиться, что размерность плотности магнитного момента \mathcal{M} совпадает с размерностью магнитного поля *)

$$[\mathcal{M}] = [H] = \text{г}^{1/2}/\text{см}^{1/2} \cdot \text{с}.$$

Отличная от нуля намагниченность \mathcal{M} появляется только под воздействием магнитного поля, причем в не слишком сильных полях линейно растет с полем:

$$\mathcal{M} = \chi H. \quad (2.1)$$

Во всяком случае так обстоит дело при высоких температурах.

Безразмерный множитель χ носит название *магнитной восприимчивости*.

Парамагнетики — это вещества, у которых $\chi > 0$, у диамагнетиков же $\chi < 0$. Третьего не дано: веществ, у которых $\chi = 0$, в природе нет **). Как правило,

*) Задача. Определите размерность H и \mathcal{M} .

**) Пара- и диамагнетизм открыл Фарадей.

парамагнитная восприимчивость $\chi_{\text{пара}}$ значительно больше по величине диамагнитной $\chi_{\text{диа}}$, т. е.

$$\chi_{\text{пара}} \gg |\chi_{\text{диа}}|,$$

хотя есть очень важные исключения (см. далее § 6). Магнитная восприимчивость диамагнетиков от температуры практически не зависит, а у парамагнетиков — зависит весьма существенно.

Пьер Кюри в 1895 г. установил, что

*парамагнитная восприимчивость уменьшается обратно пропорционально температуре *) T .*

Эта зависимость хорошо выполняется при достаточно высоких температурах для всех парамагнетиков. Только что приведенное утверждение принято называть законом Кюри **). При понижении температуры отчетливо наблюдается систематическое отклонение от этого закона — особенно при исследовании твердых и жидких парамагнетиков. Температурную зависимость парамагнитной восприимчивости удобно изображать в виде зависимости $1/\chi$ от T . Из рис. 18 видно, что для всех приведенных на нем веществ экспериментальные значения $1/\chi$ линейно зависят от температуры (при больших T), однако, для одних веществ при экстраполяции экспериментальная прямая пересекает ось абсцисс при положительной температуре Θ_p , а для других веществ — при отрицательной. Поведение $\chi = \chi(T)$ можно описать формулой, обобщающей закон Кюри,

$$\chi = \frac{C}{T - \Theta_p}; \quad C \text{ и } \Theta_p \text{ — константы; } T \gg |\Theta_p|, \quad (2.2)$$

и носящей название *закона Кюри — Вейсса*. Величину Θ_p (даже когда $\Theta_p < 0$) называют *парамагнитной точкой Кюри*. Следует не забывать прилагательное «парамагнитная». Понятие просто «точка Кюри» имеет другой

*) Мы будем использовать абсолютную шкалу температур, шкалу Кельвина. Нуль этой шкалы соответствует основному состоянию тела, когда теплового движения частиц в нем нет вовсе. Хотя температура — привычное понятие, истинный физический смысл температуры нелегко усвоить. Мы рекомендуем читателям книгу Я. А. С м о р о д и н с к о г о «Температура», вышедшую в библиотеке «Квант» в 1981 г.

**) Независимость от температуры диамагнитной восприимчивости тоже обнаружил П. Кюри. Он же нашел, что повышение температуры может разрушить ферромагнетизм (см. дальше),

смысл, о котором будет рассказано ниже. То, что Θ_p может быть меньше нуля, никак не противоречит тому факту, что отрицательных абсолютных температур быть не может. Если $\Theta_p < 0$, это означает только, что $\chi(T) < C/T$ при $T \gg |\Theta_p|$, в то время как при $\Theta_p > 0$ $\chi(T) > C/T$.

Константы C и Θ_p в законе Кюри — Вейсса у разных веществ различны. Наша задача — установить, как они связаны с характеристиками атомов и молекул, из которых вещества построены.

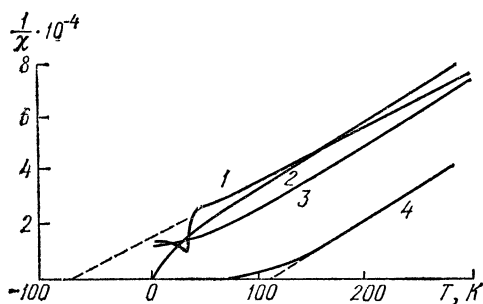


Рис. 18. Зависимость $1/\chi$ от T для парамагнетиков: кривая 1 — CuSO_4 ; кривая 2 — $\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$; кривая 3 — $\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$; кривая 4 — Ni .

Поведение парамагнетиков при температурах, близких парамагнитной температуре Кюри $T \approx |\Theta_p|$, представляет значительный интерес и будет нами специально рассмотрено после того, как мы поймем, почему при $T \gg |\Theta_p|$ имеет место закон Кюри и почему при $T \approx \approx |\Theta_p|$ наблюдаются отклонения от него.

Магнитные свойства вещества иногда описывают магнитной восприимчивостью χ , а иногда *магнитной проницаемостью*

$$\kappa = 1 + 4\pi\chi. \quad (2.3)$$

Ясно, что

у парамагнетиков $\kappa > 1$,

у диамагнетиков $\kappa < 1$.

Согласно соотношениям (2.1) и (2.3) магнитная проницаемость есть коэффициент пропорциональности между вектором \mathbf{H} и вектором \mathbf{B} , вводимым следующим равен-

СТВОМ:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}. \quad (2.4)$$

Тогда, действительно, $\mathbf{B} = \kappa\mathbf{H}$ и $\kappa = 1 + 4\pi\chi$.

Хотя вектор \mathbf{B} называют вектором магнитной индукции, а \mathbf{H} — магнитным полем, истинный смысл \mathbf{B} состоит в том, что \mathbf{B} (а не \mathbf{H} !) есть среднее магнитное поле в среде. Каждый атом — микроскопический источник магнитного поля, поле в среде изменяется от точки к точке на межатомных расстояниях. Кроме того, атомы и электроны в них находятся в непрерывном движении. Поэтому микроскопическое (истинное) поле все время изменяется. То значение поля, которое фиксируют макроскопические приборы, есть результат усреднения и по времени и по пространству микроскопического поля. Повторим еще раз: \mathbf{B} — это среднее магнитное поле.

Когда магнитное поле пронизывает область, занятую веществом, то отсутствие магнитных зарядов (см. гл. 1, § 1) проявляется в том, что магнитные силовые линии не обрываются: нормальная (к поверхности тела) составляющая вектора \mathbf{B} равна нормальной составляющей вектора \mathbf{H} вне тела (рис. 19). И все же принято называть магнитным полем вектор \mathbf{H} , а не \mathbf{B} . Надеемся, это несоответствие названия и смысла не приведет к недоразумениям. Пока магнитная проницаемость κ не слишком отличается от единицы, различие между \mathbf{B} и \mathbf{H} вообще не очень существенно.

Этот обзорный параграф, носящий в основном констатирующий характер, мы закончим определением идеального диамагнетика, для которого $\chi = -1/4\pi$, а $\kappa = 0$. Равенство нулю магнитной проницаемости, а значит и индукции \mathbf{B} , означает, что в идеальном диамагнетике среднее магнитное поле равно нулю. Такое тело, если оно существует, должно выталкивать из себя магнитные силовые линии. Как мы убедимся далее (§ 6)

сверхпроводники — идеальные диамагнетики.

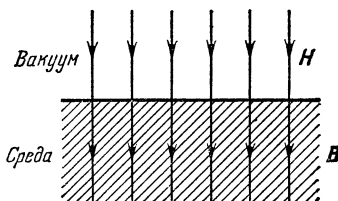


Рис. 19. Магнитные силовые линии не обрываются, пересекая границу между вакуумом и средой.

§ 2. Магнитное поле выстраивает магнитные моменты

Сравнивая диамагнетики и парамагнетики, мы легко обнаруживаем, чем они отличаются: парамагнетики состоят из атомов или молекул, имеющих магнитные моменты, а диамагнетики — из атомов или молекул, магнитные моменты которых равны нулю. Теперь мы покажем, что наше наблюдение зафиксировало существенное обстоятельство: *тела, состоящие из атомов (молекул), имеющих магнитный момент, должны быть парамагнетиками, а тела, состоящие из атомов (молекул) с нулевым моментом, — диамагнетиками.*

В первой главе мы подробно говорили о магнитных моментах отдельных атомов и убедились, что атомов, обладающих отличным от нуля магнитным моментом, значительно больше, чем атомов с нулевым моментом. Но большинство тел состоит не из атомов, а из молекул. Соединение атомов в молекулы детально описывается квантовой механикой, позволяющей рассчитать (во всяком случае, в принципе) силы, действующие между субмолекулярными частицами, и выяснить электронную структуру получающихся молекул. Не имея возможности подробно разбираться в этих вопросах, отметим только, что часто при соединении в молекулу двух или нескольких атомов, обладающих магнитными моментами (будем называть такие атомы парамагнитными), молекула оказывается лишенной магнитного момента (диамагнитной)*). Кроме проанализированного в § 10 первой главы случая молекулы H_2 (из двух парамагнитных атомов образуется диамагнитная молекула), рассмотрим еще молекулу поваренной соли $NaCl$. Электронные конфигурации и термы атомов Na и Cl таковы:

$$Na: 1s^2 2s^2 2p^6 3s; \quad {}^2S_{1/2};$$

$$Cl: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5; \quad {}^2P_{3/2}.$$

И атом натрия, и атом хлора — парамагнитные атомы. Это ясно видно по их термам.

Возникновение молекулы $NaCl$ сопровождается образованием иона Na^+ , электронная оболочка которого аналогична электронной оболочке атома инертного га-

*) Напомним, что речь идет только об электронном магнитном моменте,

за Ne, и иона Cl^- , чья электронная оболочка аналогична электронной оболочке Ar. Оба иона, тем самым, не имеют магнитных моментов. За счет электростатического (кулоновского) притяжения они образуют диамагнитную молекулу. Нам хотелось подчеркнуть, что диамагнетиков больше, чем можно подумать, глядя на электронные конфигурации отдельных атомов. Наоборот, парамагнитные молекулы — редкость. Наиболее известный пример кислород: молекула O_2 парамагнитна.

В газе молекулы непрерывно движутся, сталкиваются друг с другом, со стенками, причем длина свободного пробега молекул значительно превышает размер молекулы. Повышение температуры означает увеличение средней скорости хаотического движения молекул. В твердом теле, в кристалле, молекулы расположены в строго определенном порядке, а тепловое движение проявляется в увеличении амплитуды их колебаний вокруг положений равновесия. Жидкость — промежуточная форма. Молекулы колеблются вокруг случайных положений равновесия, которые не закреплены, а перемещаются, обеспечивая текучесть жидкости. Рост температуры жидкости означает увеличение интенсивности хаотического движения молекул.

В этом кратком описании агрегатных состояний мы не интересовались, есть у молекул магнитные моменты или нет. Это сделано не только из-за желания упростить и без того сложную картину, но и потому, что до тех пор, пока нас не интересуют магнитные свойства вещества, наличие или отсутствие магнитного момента у молекулы не очень существенно. Свойства жидкого кислорода (молекулы парамагнитны) не отличаются качественно от свойств жидкого азота (молекулы диамагнитны). Для нас важно другое. Изучая макроскопические магнитные свойства парамагнетиков, мы можем на первых порах игнорировать расположение и тепловое движение центров тяжести молекул, изучая только положение в пространстве магнитных моментов молекул. Для выяснения магнитных свойств веществ парамагнитные молекулы можно представить в виде микроскопических стрелок — маленьких магнетиков, способных $2J + 1$ способами ориентироваться в пространстве.

Совокупность частиц, поведение которых зависит только от направления их магнитных моментов, называют *газом магнитных стрелок*.

Газ магнитных стрелок — удобная модель для описания свойств парамагнетиков при высоких температурах. Слово «газ» подчеркивает только то обстоятельство, что не учитывается взаимодействие между магнитными моментами.

Чтобы продвинуться дальше, нам придется воспользоваться некоторыми результатами *статистической физики* *). Задумаемся над тем, что такое тепловое движение для газа магнитных стрелок, помещенных в магнитное поле H . Статистическая физика утверждает:

число частиц $N(m_J)$ с определенной проекцией магнитного момента M на магнитном поле H пропорционально $\exp(-\epsilon_M/kT)$,

где, согласно (1.28) и (1.33), $\epsilon_M = -MH = -g\mu_H m_J$ — энергия магнитного момента M в магнитном поле H , k — постоянная Больцмана, равная $1,4 \cdot 10^{-16}$ эрг/град. Коэффициент пропорциональности выбирается из естественного требования: сумма чисел частиц (в единице объема) с разными проекциями магнитного момента должна совпадать с полным числом частиц N (в единице объема):

$$\sum_{m_J=-J}^J N(m_J) = N.$$

Таким образом,

$$\frac{N(m_J)}{N} = \frac{e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}{\sum_{m_J=-J}^J e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}, \quad (2.5)$$

где J — полный момент атома или молекулы (напомним, что величина g -фактора определяется значениями L , S и J (см. формулу (1.34)).

Из этой формулы видно, что для газа магнитных стрелок слова «тепловое движение» означают определенное, зависящее от температуры, распределение частиц по магнитным уровням. Наверное, такое «определение»

*) *Статистическая физика* — специальный раздел физики, изучающий закономерности, которым подчиняются поведение и свойства макроскопических тел, т. е. тел, состоящих из колоссального числа отдельных частиц — атомов, молекул, электронов, ионов и т. д.

теплового движения вызовет удивление. Ничего не поделаешь — смысл температуры (в данном случае, конечно) заключен именно в формуле (2.5).

При абсолютном нуле температуры (при $T \rightarrow 0$) все частицы «собираются» на магнитном уровне с $m_J = J$:

$$N_{m_J=J} = N; \quad N_{m_J \neq J} = 0,$$

т. е. магнитные моменты всех частиц «параллельны» магнитному полю. Параллельны, конечно, настолько, насколько это допускает квантовая механика. Поэтому мы сохранили кавычки (см. стр. 45).

При формальном стремлении температуры к бесконечности (о том, что такое большие и малые температуры, мы поговорим ниже) величина $N(m_J)$ перестает зависеть от m_J :

$$\frac{N(m_J)}{N} = \frac{1}{2J+1},$$

т. е. частицы равномерно распределены по всем уровням: $(2J+1)$ -я часть от общего числа частиц находится на каждом уровне.

О т р и ц а т е л ь н ы е а б с о л ю т н ы е т е м п е р а т у р ы

Интуитивно ясно, что температура определяет энергию газа (или определяется энергией газа?!). Действительно, предположим, что мы умеем создавать газ магнитных стрелок с определенной энергией — задавать полную энергию газа магнитных стрелок. Обозначим ее \mathcal{E} . Тогда согласно формуле (2.5) *)

$$\mathcal{E} = -N\mu g H \frac{\sum_{m_J=-J}^J m_J e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}{\sum_{m_J=-J}^J e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}},$$

и для каждого значения температуры можно вычислить энергию газа. Рассмотрим подробно простейший слу-

*) Формула для \mathcal{E} получена из следующих соображений: энергия газа есть сумма энергий частиц, находящихся на всех уровнях; энергия частиц на данном уровне (с данным m_J) есть энергия уровня, умноженная на число частиц на данном уровне,

чай: $J = 1/2$, $g = 2$. Зависимость энергии от температуры будет иметь вид

$$\mathcal{E} = -N\mu H \operatorname{th} \frac{\mu H}{kT}. \quad (2.6)$$

При стремлении (формальном!) T к бесконечности энергия \mathcal{E} стремится к нулю: $\mathcal{E}_\infty = 0$. Нуль получился из-за нашего выбора начала отсчета для магнитных уровней. Энергия нижнего уровня равна $-\mu H$, а верхнего $+\mu H$. При всех конечных температурах энергия отрицательна, так как на нижнем уровне больше частиц, чем на верхнем.

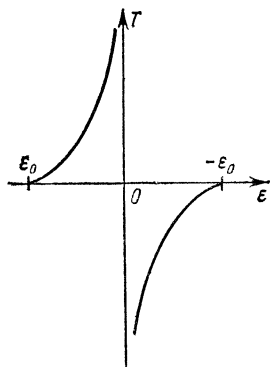


Рис. 20. Зависимость температуры от полной энергии системы магнитиков ($J = 1/2$) в магнитном поле H ; $\epsilon_0 = -N\mu H < 0$.

Зададим теперь «неприличный» вопрос. А что будет, если сделать энергию двухуровневого газа большей \mathcal{E}_∞ ? Для этого надо «устроить» такое распределение частиц, чтобы на верхнем уровне их было больше, чем на нижнем (это распределение называют *инверсным*). Какая температура будет соответствовать таким состояниям? Ответ совершенно неожиданный: «Отрицательная!». Из рис. 20 видно: отрицательная температура «расположена» за бесконечно большой положительной — ей соответствует большая энергия.

Подчеркнем, что возможность введения отрицательной температуры связана с конечным числом уровней системы (в данном случае у газа магнитных стрелок). Настоящая температура всегда положительна. Отрицательная температура — удобный способ описания неравновесного состояния систем с конечным числом уровней, применяемый в физике и технике лазеров.

* * *

Мы слишком вольно обращались с температурой, устремляя ее к нулю и к бесконечности. Наше беспокорство по этому поводу выдает подчеркивание формальности этой процедуры. В физике нет абстрактно больших и малых величин (мы уже имели возможность

в этом убедиться). Величину интересующего нас параметра надо обязательно сравнивать с чем-то. С какой величиной следует сравнивать температуру T ? Во все формулы этого параграфа температура входит в отношение $\mu H/kT$ (g -фактор мы опустили, он порядка единицы). Температуру следует считать малой или большой в зависимости от того, $\mu H/kT \gg 1$ или $\mu H/kT \ll 1$. Найдем соотношение (в принятых единицах) между T и H при $\mu H = kT$:

$$T \text{ К} = 0,5 \cdot 10^{-4} H \text{ Э.} \quad (2.7)$$

Это столь важное соотношение, что на нем следует остановиться. В обычных полях и при обычных комнатных температурах ($\approx 300 \text{ К}$) $kT > \mu H$. Только при очень низких температурах (вблизи абсолютного нуля) удастся изменить неравенство на обратное (при магнитном поле $H = 10^4 \text{ Э}$ равенство достигается при $T = 0,5 \text{ К}$!).

Физический смысл величины μH ясен из формулы (1.29); μH — это расстояние между магнитными уровнями. И вот оказалось, что оно обычно мало по сравнению с kT — с температурой, выраженной в энергетических единицах. Остальные (не магнитные) уровни атомов или молекул отделены от основного, наинизшего уровня на расстояние порядка нескольких электронвольт, а $1 \text{ эВ} \approx \approx 10^5 \text{ К}$ (рис. 21). В обычных условиях эти уровни не возбуждаются*), что дает право забыть об их существовании и считать атом (молекулу) магнитной стрелкой и использовать модель газа магнитных стрелок для расчета магнитных свойств.

Теперь мы переходим к главному утверждению этого параграфа. Мы докажем, что газ магнитных стрелок — парамагнетик. Для этого мы, воспользовавшись рас-

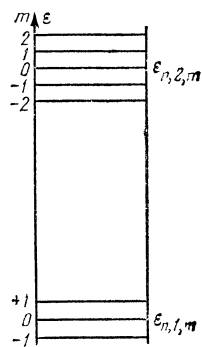


Рис. 21. Магнитные уровни с различными n и l удалены друг от друга на большое «расстояние».

*) Число атомов в возбужденном состоянии пропорционально $e^{-\Delta \epsilon_n/kT}$, где $\Delta \epsilon_n = \epsilon_n - \epsilon_0$, ϵ_n — энергия возбужденного, а ϵ_0 — основного состояния (при комнатной температуре, т. е. при $T = 300 \text{ К}$, если $\Delta \epsilon_n \approx 1 \text{ эВ} = 10^5 \text{ К}$, то $e^{-\Delta \epsilon_n/kT} \approx e^{-300!}$).

пределением (2.5), вычислим магнитный момент его единицы объема \mathcal{M} (точнее, проекцию \mathcal{M} на магнитное поле H) *):

$$\mathcal{M} = N \mu g \frac{\sum_{m_J=-J}^J m_J e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}{\sum_{m_J=-J}^J e^{\frac{\mu g H}{kT} m_J}}. \quad (2.8)$$

Теперь воспользуемся тем, что $\mu g H \ll kT$. В знаменателе (2.8) экспоненты можно заменить единицами, а в числителе надо оставить первые (линейные по H) члены разложения экспоненты:

$$\mathcal{M} = \frac{N (\mu g)^2}{kT} \frac{1}{2J+1} \sum_{m_J=-J}^J m_J^2.$$

Но $\sum_{m_J=-J}^J m_J^2 = \frac{1}{3} J(J+1)(2J+1)$ (вывод этой формулы — полезное алгебраическое упражнение). Поэтому

$$\mathcal{M} = \frac{N (\mu g)^2}{3kT} J(J+1) H,$$

а магнитная восприимчивость

$$\chi = \frac{N (\mu g)^2}{kT} \frac{J(J+1)}{3} \quad (2.9)$$

положительна и подчиняется закону Кюри, т. е. действительно:

газ магнитных стрелок парамагнитен.

Мы сейчас не только доказали это утверждение, но и сумели «по дороге» вычислить константу в законе Кюри. Как видно из формулы (2.7), измеряя коэффициент пропорциональности между $1/T$ и χ , мы можем определить значение магнитного момента молекул газа, точнее, — величину $(\mu g)^2 / J(J+1)$.

Как мы знаем, при понижении температуры становятся заметными отклонения от закона Кюри (особенно в твердых и жидких парамагнетиках). Это есте-

*) См. примечание на стр. 73.

ственно, так как при выводе формулы (2.9) мы не учитывали взаимодействие атомных моментов друг с другом — магнитно-дипольное и (главное!) обменное. При высоких температурах это вполне законно *), так что задача настоящего параграфа выполнена. К чему приводит взаимодействие, мы расскажем позже.

Электронный парамагнитный резонанс

Мы уже достаточно узнали об атомных магнетиках и о распределении магнитных частиц по энергетическим уровням, чтобы рассказать об интересном и важном явлении, носящем название *электронного парамагнитного резонанса* **).

Когда мы рассматривали отдельный магнитный момент в постоянном и однородном магнитном поле (гл. 1, § 6), то установили, что отклоненный от поля, он будет прецессировать с частотой γH , где γ — гиромагнитное отношение. Прецессия с постоянной частотой, если ее рассматривать «сбоку», выглядит как гармоническое колебание. Но известно: если на колеблющееся тело воздействовать переменной силой той же частоты, то возникает резонанс — колеблющееся тело отберет энергию у источника силы.

Можно ли создать периодическую силу, действующую на магнитный момент? Можно. Для этого, как оказывается, надо вращать магнитное поле, т. е. сделать так, чтобы поле, действующее на магнитный момент, кроме постоянной составляющей имело переменную, направленную перпендикулярно к постоянной

*) Когда речь идет о частицах обычного классического газа, пренебрежение их взаимодействием при высоких температурах оправдано, так как $\frac{3}{2} kT$ есть средняя кинетическая энергия молекулы, и если она велика по сравнению со средней энергией взаимодействия (рассчитанной на одну частицу, естественно), то последней, конечно, можно пренебречь. В газе магнитных стрелок температура определяет лишь заселенность магнитных уровней. Какое отношение это имеет к взаимодействию между частицами? И все же, как мы убедимся (см. гл. 3), при высоких температурах действительно вполне законно пренебрегать взаимодействием, т. е. модель газа справедлива.

**) Электронный парамагнитный резонанс (ЭПР) был открыт Е. К. Завойским в 1944 г. в экспериментах на солях группы железа. Соображения о возможности существования ЭПР высказывались, начиная с 1922 г.

и вращающуюся вокруг последней с частотой ω *). Если $\omega = \gamma H$, наступает ЭПР, проявляющийся в резком возрастании потерь магнитной энергии переменного магнитного поля. Так объясняется ЭПР на «классическом» языке.

Квантовое объяснение даже проще. Пусть мы имеем дело с наиболее квантовым газом — газом электронных спинов. Тогда $g = 2$, а μ , как всегда, магнетон Бора. Под воздействием электромагнитной волны частицы могут переходить с нижнего уровня на верхний, если энергия электромагнитного кванта — фотона равна разности энергий между уровнями, т. е. при $\hbar\omega = 2\mu H$. Заметим: так как спиновое гиромагнитное отношение равно $\gamma = e/mc$, то классическое и квантовое условия ЭПР совпадают.

Электромагнитные волны могут взаимодействовать не только с электронными магнитными моментами, но и с ядерными. Энергия ядерных частиц в магнитном поле зависит от величины проекции ее магнитного момента на магнитное поле. Как и в случае электронных магнитных моментов, возникает система эквидистантных уровней, между которыми под воздействием электромагнитного излучения могут происходить переходы. Это явление носит название ядерного магнитного резонанса (ЯМР) **). Качественно ЭПР и ЯМР очень похожи, но существенно различаются количественно, что вызвано различием электронных и ядерных магнитных моментов ***).

ЭПР и ЯМР превратились в важные методы исследования и используются не только в физике; с их помощью создан целый ряд приборов в химии, в геологии, в биологии — везде, где надо «заглянуть» внутрь тела, не разрушая его.

*) Длинная фраза может создать впечатление сложности осуществления. Обычно образец помещают в резонатор, в котором возбуждают периодическое высокочастотное электромагнитное поле, а резонатор (с образцом) помещают либо между полюсами магнита, либо внутри соленоида.

**) ЯМР открыт и объяснен Ф. Блохом и Э. Парселлом в 1946 г. (Нобелевская премия по физике за 1952 г.).

***). *Задача.* Перепишите условие ЭПР и запишите условие ЯМР в виде зависимости длины электромагнитной волны от магнитного поля. Найдите численное значение коэффициента пропорциональности для электрона и протона (см. таблицу I на стр. 43).

§ 3. Диамагнетизм

Совсем кратко природу парамагнетизма можно объяснить так: магнитное поле *ориентирует* магнитные моменты атомов или молекул.

Диамагнетизм возникает из-за того, что магнитное поле в любом атоме, в любой молекуле *создает* магнитный момент, пропорциональный магнитному полю. Возникает магнитный момент из-за того, что на движущиеся электроны действует сила Лоренца, равная

$$F = \frac{e}{c} [vH]. \quad (2.10)$$

Строго получить значение диамагнитной восприимчивости можно, только используя аппарат квантовой механики. Но можно поступить непоследовательно: используя классическую механику, показать причину возникновения диамагнитного эффекта, оценить величину диамагнитной восприимчивости, привести точную формулу, а лишь потом указать, в каком пункте вывод нестрог. Мы поступим именно так. Это научит использовать результаты квантовой механики, оперируя классическими терминами.

Как мы увидим, диамагнитная восприимчивость очень мала. Если атом *имеет* магнитный момент, то его изменение, обусловленное диамагнетизмом, столь мало, что его попросту можно не учитывать. Поэтому диамагнетизм интересно изучать в таких атомах (или молекулах), которые собственным (парамагнитным) моментом не обладают.

Нам надо начать с создания «классической модели» диамагнитного атома. По-видимому, простейшая классическая модель атома без магнитного момента такова *): два электрона, вращающиеся вокруг ядра в противоположные стороны по одной орбите (по и против часовой стрелки). Каждый электрон, конечно, обладает моментом количества движения (а значит, и магнитным моментом), но сумма двух моментов равна нулю.

Поместим теперь наш «атом» в магнитное поле H так, чтобы орбиты электронов оказались в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Еще одна важная

*) Напомним, что один «квантовый» электрон может вращаться и иметь магнитный момент, равный нулю, — если он находится в s -состоянии (см. стр. 34).

оговорка, и мы перейдем к расчету: магнитное поле так мало, что силу Лоренца (2.10) можно считать небольшим возмущением по сравнению с силой, действующей на электроны со стороны ядра. Пусть v_0 — скорость электрона, движущегося по окружности радиуса R , когда магнитное поле H равно нулю, а v — его скорость при $H \neq 0$. Тогда, приравнивая центростремительную силу радиальной проекции силы, действующей на электрон, можно определить изменение скорости частицы Δv , обусловленное магнитным полем.

При $H = 0$

$$\frac{m_e v_0^2}{R} = F_R,$$

а при $H \neq 0$

$$\frac{m_e v^2}{R} = F_R - \frac{eH}{c} v.$$

Вычитая одно уравнение из другого и ограничиваясь линейным по H членом, имеем

$$\Delta v = - \frac{eH}{2m_e c} R. \quad (2.11)$$

Обратим внимание, что знак Δv не зависит от направления вращения при $H = 0$. Один электрон в нашем двух-электронном атоме вращается чуть быстрее, а другой — чуть медленнее. Величина $\Delta v/R = -eH/2m_e c$ имеет размерность частоты. Ее называют ларморовой частотой ω_L (по имени американского физика Дж. Лармора). Мы видим, что под действием силы Лоренца (2.10) электрон совершает вращательное движение вокруг магнитного поля. Это вращение накладывается на движение электрона при $H = 0$.

Мы рассмотрели здесь очень частный случай: магнитное поле перпендикулярно к плоскости орбиты. Можно доказать более общую теорему (теорему Лармора):

пусть известно движение электронов в отсутствие магнитного поля; движение в слабом магнитном поле H будет таким же, как и движение без поля с добавочным вращением вокруг H с угловой скоростью, равной частоте ω_L .

Вращение вокруг H часто называют ларморовой прецессией (рис. 22).

Между прочим, с ларморовой прецессией мы уже встречались в § 6 гл. 1, когда рассматривали вращение магнитного момента в магнитном поле. По существу, это был пример на применение теоремы Лармора: движение электрона (при $H = 0$) создает магнитный момент, который под действием магнитного поля прецессирует (естественно, с ларморовой частотой).

Вернемся к нашему «классическому» атому. Оба электрона при $H \neq 0$ приобретают дополнительный момент количества движения, равный $m_e \Delta v R$ и направленный по магнитному полю. Таким образом, атом приобретает отличный от нуля момент количества движения, равный сумме моментов электронов. Раз есть момент количества движения,

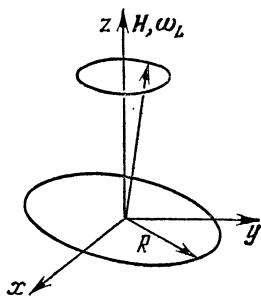


Рис. 22. Нормаль к плоскости траектории прецессирует вокруг поля H с ларморовой частотой ω_L , R — радиус траектории.

значит, у атома есть и магнитный момент M_a . Так как момент количества движения направлен по полю, а гиромагнитное отношение отрицательно (см. (1.10), $e < 0$!), то магнитный момент направлен *против* поля *):

$$M_a = 2 \cdot \frac{e}{2m_e c} m_e \Delta v R = -2 \frac{e^2 R^2}{4m_e c^2} H.$$

Придадим этому выражению вид, который позволит нам освободиться от «классичности» модели. Настоящий «квантовый» электрон движется по сфере радиуса r , а не по окружности $x^2 + y^2 = R^2$. Так как $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и так как все направления в сферическом атоме равноправны, то $R^2 = \frac{2}{3} r^2$. Придадим r индекс i , отмечающий номер электрона в атоме и запишем правильное квантовомеханическое выражение для диамагнитного момента любого атома, содержащего Z электронов (в атоме, который мы рассматривали, $Z = 2$):

$$M_a = -\frac{e^2 H}{6m_e c^2} \sum_{i=1}^Z r_i^2. \quad (2.12)$$

*) Для положительных зарядов и момент количества движения и магнитный момент, обусловленные действием поля H , направлены против поля.

Если единица объема тела содержит N атомов, то диамагнитная восприимчивость равна

$$\chi_{\text{диа}} = -\frac{e^2 N}{6m_e c^2} \sum_{i=1}^Z r_i^2. \quad (2.13)$$

Строго говоря, это выражение правильно, если под r_i^2 понимать *квантовомеханическое среднее*. Что означают эти слова, по-настоящему можно понять, только разобравшись в математическом аппарате квантовой механики (см. стр. 30). Для оценок можно подставлять вместо r_i^2 величину a^2 , где a — размер атома.

Где мы «сжульничали» при выводе?

Вывод основан на существовании стабильных атомных орбит (радиус R мы считали неизменным) и это может быть оправдано только квантовой механикой, согласно которой имеются дискретные стабильные уровни энергии атомных электронов *).

Все вещества состоят из атомов и молекул, в которых движутся электроны. Очевидно, диамагнетизм — общее свойство. Конечно, он есть и тогда, когда атомы (молекулы) обладают магнитными моментами (мы уже об этом упоминали). В общем случае магнитная восприимчивость χ имеет вид

$$\chi = \chi_{\text{пара}} + \chi_{\text{диа}}.$$

Второе слагаемое отрицательное, а будет вещество парамагнетиком или диамагнетиком, зависит от соотношения между диамагнитной и парамагнитной восприимчивостями. Как мы сейчас убедимся, $|\chi_{\text{диа}}| \ll \chi_{\text{пара}}$, т. е., если вещество состоит из атомов, имеющих магнитные моменты, то оно — парамагнетик.

Действительно,

$$\frac{\chi_{\text{диа}}}{\chi_{\text{пара}}} = \frac{kTm_e a^2}{\hbar^2}, \quad (2.14)$$

но $\hbar^2/m_e a^2$ по порядку величины есть энергия электрона в атоме ε_a (см. § 4, гл. 1); она приблизительно равна одному или нескольким электронвольтам, а $1 \text{ эВ} \approx 10^5 \text{ К}$. Ясно, что в обычных условиях $kT \ll \hbar^2/m_e a^2$, а следовательно, $|\chi_{\text{диа}}| \ll \chi_{\text{пара}}$.

*) В свое «оправдание» заметим: формула (2.13) выведена в 1905 г. П. Ланжевеном, который исходил из классических предположений,

Малость диамагнитного момента по сравнению с парамагнитным особенно отчетливо видна из следующего рассуждения: для намагничивания газа магнитных стрелок нужно магнитное поле, превышающее величину kT/μ (мы его оценивали на стр. 75), а для создания у атома магнитного момента порядка $\mu = e\hbar/m_e c$ нужно грандиозное магнитное поле порядка $\epsilon_a/\mu \approx 10^8$ Э. В таком поле магнитная энергия порядка кулоновской энергии, что, конечно, должно привести к полной перестройке атома *) (в частности, перестают быть справедливыми формулы (2.12) и (2.13)).

В земных условиях магнитное поле $H \approx 10^8$ Э создать не удастся, но в космосе поля такого масштаба или даже большие — по-видимому, не редкость.

В отличие от парамагнитной восприимчивости, диамагнитная не зависит от температуры. Это связано с уже обсуждавшимся фактом больших энергетических «зазоров» между основным состоянием атома и его возбужденными состояниями (вклад в среднее значение дает только основное состояние, а вклад возбужденных состояний экспоненциально мал; см. примечание на стр. 75).

Диамагнитная восприимчивость во столько раз меньше, чем парамагнитная, что даже небольшая примесь парамагнитных атомов, внесенная в диамагнитное тело, делает его парамагнетиком.

И еще: до сих пор мы говорили только об электронном магнетизме (правда, на стр. 43 мы привели значения магнитных моментов протона и нейтрона). Оправданием служит малость ядерных магнитных моментов (магнитный момент протона в 700 раз меньше магнетона Бора — собственного магнитного момента электрона). Если же, однако, исследуемое тело — диамагнетик, а ядра составляющих его атомов обладают магнитными моментами, то ядерный парамагнетизм может проявиться. Значение ядерной парамагнитной восприимчивости легко записать по аналогии с электронной парамагнитной восприимчивостью (см. формулу (2.9)):

$$\chi_{\text{яд}} = \frac{N_{\text{яд}} \mu_{\text{яд}}^2}{kT} \frac{I(I+1)}{3}.$$

Здесь $N_{\text{яд}}$ — число парамагнитных ядер в единице объема, $\mu_{\text{яд}}$ — магнитный момент ядра, I — его спин.

*) *Задача.* Показать, используя формулу (2.12), что магнитный момент диамагнитного атома $\sim \mu$, если $eH \approx e^2/a^2$.

Даже если $\chi_{\text{яд}} \ll |\chi_{\text{диа}}|$, обнаружить ядерный парамагнетизм можно по температурному ходу магнитной восприимчивости. Именно так, измеряя магнитную восприимчивость кристаллического водорода при температурах, близких к абсолютному нулю, Б. Г. Лазарев и Л. В. Шубников в 1936 г. открыли ядерный парамагнетизм и измерили магнитный момент протона.

Магнетизм — квантовое явление

Мы многократно подчеркивали необходимость использования квантовой механики при исследовании магнитных свойств. В настоящее время любой курс физики магнитных явлений целиком основан на квантовой механике. И все же, глядя на огромный электромагнит, притягивающий целый автомобиль (такими рисунками часто иллюстрируют учебники и популярные книги по магнетизму), трудно себе представить, что магнетизм — квантовое явление. Конечно, всякое деление макроскопических явлений на квантовые и классические весьма условно, хотя мы интуитивно понимаем, какие явления следует относить к классическим. Например, свойства газов хорошо описываются классической статистической физикой. Характеристики атомов или молекул, из которых состоят газы, служат «условиями задачи», берутся как данные, а расчеты ведутся по законам классической физики. Когда речь идет о парамагнитном газе, то можно считать, что атомы обладают микроскопическими магнитными моментами M_a , пренебречь пространственным квантованием и, используя формулы классической статистической физики, вычислять магнитный момент единицы объема. Для классического значения парамагнитной восприимчивости мы получим *)

$$\chi_{\text{кл}} = \frac{NM_a^2}{3kT}. \quad (2.15)$$

*) *Задача.* Выведите формулу

$$\mathcal{M} = NM_a L\left(\frac{M_a H}{kT}\right); \quad L(x) = \coth x - \frac{1}{x}, \quad (2.15')$$

используя то обстоятельство, что число частиц, магнитный момент которых составляет угол θ с магнитным полем H , пропорционально $\exp(M_a H \cos \theta / kT)$ (см. стр. 76).

Из (2.15') получите выражение для $\chi_{\text{кл}}$ (формулу (2.15')), как и формулу (2.13), вывел Ланжевэн).

Надо только помнить, что атомный магнитный момент — квантового происхождения. Это, в частности, проявляется в том, что величина $M_a \approx e\hbar/m_e c$ пропорциональна постоянной Планка \hbar . Формальный переход к классической физике осуществляется, если \hbar устремить к нулю *). При этом стремится к нулю и парамагнитный момент, и магнитная восприимчивость $\chi_{кл}$.

Строгое и последовательное использование формул классической статистической физики позволяет установить: как бы ни взаимодействовали друг с другом частицы, в состоянии теплового равновесия их суммарный магнитный момент равен нулю — даже если частицы заряжены и находятся во внешнем магнитном поле **). Причина этого удивительного факта в том, что сила Лоренца (2.10) не производит работы ***), не изменяет энергии частицы, а равновесные свойства частиц определяются их распределением по энергиям.

Сформулированный выше общий результат классической статистической физики еще раз подчеркивает условность вывода формулы (2.13). Если бы мы действовали последовательно, то должны были бы получить нуль.

В заключение этого вставного раздела запишем еще раз формулу для диамагнитной восприимчивости (2.13), подставив вместо $\sum r_i^2$ квадрат боровского радиуса $a^2 = (\hbar^2/m_e e^2)^2$, а вместо числа атомов в единице объема N величину $\frac{1}{a^3} = \left(\frac{m_e e^2}{\hbar^2}\right)^3$. Последняя замена означает, что мы рассматриваем конденсированное тело, расстояния между атомами в котором порядка размеров самих атомов.

В результате получим

$$|\chi_{диа}| \approx \frac{1}{6} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \approx \frac{1}{6} \left(\frac{1}{137} \right)^2, \quad (2.16)$$

т. е. малость диамагнитной восприимчивости \rightarrow следствие малости заряда. Напомним: $e^2/\hbar c$ — безразмерный квадрат заряда (см. стр. 11).

*) Диамагнитный момент тоже стремится к нулю при $\hbar \rightarrow 0$, так как вместе с \hbar обращается в нуль размер атома ($a \approx \hbar^2/m_e e^2$).

**) Конечно, при этом нельзя считать, то частицы имеют собственный (спиновый) магнитный момент. Как мы подчеркивали, существование спина и спинowego магнитного момента — чисто квантовый эффект.

***) *Задача.* Докажите, что работа силы Лоренца равна нулю.

§ 4. Металлы. Парамагнетизм Паули

Изучая парамагнетизм и диамагнетизм, мы исходили из того, что вещества состоят из атомов (или ионов) и молекул. Но есть большой и очень важный класс веществ — металлы, которые состоят из ионов и электронов. Металл — это ионная решетка, «омываемая» электронным газом. Это, на первый взгляд очень примитивное представление, при достаточно серьезном анализе оказывается вполне правильным. Более того, оно даже допускает упрощение. Можно не думать о ионах, которые удерживают электроны в металле *), а считать, что электроны находятся в металлическом образце, как в ящике — один или несколько на атом; взаимодействие электронов друг с другом учитывать не надо, так как силы отталкивания в среднем компенсируются силами притяжения к ионам. Оторвавшиеся от ионов электроны называют *свободными электронами* или *электронами проводимости*.

Конечно, это — упрощенная модель. Ее называют моделью Друде — Лоренца. Несмотря на удивительную простоту, после привнесения в нее Зоммерфельдом идей квантовой статистики, эта модель оказалась способной объяснить многие свойства металлов, причем получаемые из нее результаты во многих случаях находятся в хорошем согласии с экспериментом.

На первый взгляд, металл обязательно должен быть парамагнетиком. Действительно, электроны — типичный газ магнитных стрелок. Число электронов N_e в единице объема огромно: $N_e \approx 10^{22} \div 10^{23} \text{ см}^{-3}$. Магнитный момент каждого электрона тоже, по атомным масштабам, очень велик — он равен магнетону Бора. Правда, ионы металла (полностью о них забывать нельзя!) должны быть диамагнитными, так как после отделения валентных электронов их электронные оболочки очень похожи на электронные оболочки атомов инертных газов (металлы переходных элементов, в частности, металлы группы железа, составляют исключение; мы поговорим о них позже). Диамагнетизм ионов, казалось бы, не может перекрыть парамагнетизм электронов проводи-

*) Кто кого удерживает — вопрос, конечно, бессмысленный. Ионы разлетелись бы под действием сил электростатического отталкивания, если бы электроны эти силы не компенсировали.

мости. Тем не менее, среди металлов встречаются не только парамагнетики, но и диамагнетики.

Есть еще один факт, не позволяющий непосредственно распространить выводы, полученные при рассмотрении газа магнитных стрелок, на электроны проводимости: магнитная восприимчивость металла практически не зависит от температуры.

В чем же дело? Какова причина особых свойств электронного газа по сравнению с классическим газом магнитных стрелок? Дело в том, что электронный газ в металле — *квантовый* газ. Квантовые газы — столь важные объекты современной физики конденсированного состояния вещества, что им следует посвятить отдельный раздел.

Ферми- и бозе-газы

Раньше (стр. 42) мы уже говорили, что все частицы делятся на два класса — фермионы и бозоны. Отличие фермионов от бозонов — специфическое квантовое свойство, обусловленное различным поведением волновой функции при перестановках частиц. Попробуем выяснить, когда «специфические квантовые свойства» должны проявляться в газе частиц массы m_a . Величина массы очень важна для дальнейшего, поэтому, характеризуя газ, мы начали именно с задания массы частиц. Пусть число частиц газа в единице объема есть N , а температура газа T . Легко сообразить, что среднее расстояние между частицами газа d равно $N^{-1/3}$ и не зависит естественно, от температуры. Согласно классической физике средняя энергия частицы газа $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT$. Отсюда средний импульс $\bar{p} = \sqrt{3kTm_a}$. Теперь вспомним соотношение неопределенностей (1.17). До тех пор, пока неопределенность физической величины (в данном случае координаты и импульса) мала по сравнению со средним ее значением, о квантовых свойствах системы можно не думать: она ведет себя как классическая. Но если это условие не выполняется, мы обязаны исследовать систему, пользуясь квантовыми законами.

Среднее расстояние между частицами показывает, с какой точностью можно задать координату отдельной частицы, т. е. определяет неопределенность Δx : $\Delta x \approx d = N^{-1/3}$. Следовательно, согласно соотношению неопределенностей (1.17) у импульса каждой частицы есть

неопределенность Δp , не меньшая $\hbar/d = \hbar N^{1/3}$. С понижением температуры \bar{p} уменьшается, а при некоторой температуре $T_{\text{кв}}$ такой, что $kT_{\text{кв}} = \hbar^2 N^{2/3}/m_a$ оказывается порядка Δp . Таким образом,

при $T \gg T_{\text{кв}}$ газ можно считать классическим, при $T \lesssim T_{\text{кв}}$ необходимо учитывать законы квантовой механики;

$$T_{\text{кв}} = \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{m_a k}. \quad (2.17)$$

Газ при $T \lesssim T_{\text{кв}}$ называют *вырожденным*, причем если частицы газа фермионы — ферми-газом, если бозоны — бозе-газом.

Вычислим $T_{\text{кв}}$ для газа магнитных стрелок — к примеру кислорода. Взяв $m_a = 0,5 \cdot 10^{-22}$ г (для молекулы O_2) и $N = 2,7 \cdot 10^{19}$ см $^{-3}$, получим $T_{\text{кв}} \approx 10^{-3}$ К. Раньше, чем проявятся его квантовые свойства, кислород превратится в жидкость (при $-183^\circ\text{C} \approx 90$ К) и затвердеет (при $-219^\circ\text{C} \approx 54$ К). В жидких же и твердых парамагнетиках (неметаллах) при низких температурах складывается взаимодействие между магнитиками, и модель газа невзаимодействующих магнитных стрелок перестает быть справедливой.

Совершенно другая картина возникает, когда мы обращаемся к электронному газу в металле. При $N_e \approx 10^{23}$ см $^{-3}$ и $m_e \approx 10^{-27}$ г $T_{\text{кв}} \approx 10^5$ К (!), т. е. всегда (при любой температуре!) металл содержит квантовый электронный газ.

О свойствах бозе-газа при $T \gtrsim T_{\text{кв}}$ мы расскажем в третьей главе. Здесь же мы остановимся только на свойствах ферми-газа; ведь электроны — это фермионы.

Так как в обычных условиях температура T значительно меньше $T_{\text{кв}}$, надо прежде всего рассмотреть предельный случай — поведение электронного газа при $T = 0$.

Состояние свободного электрона характеризуется его импульсом p и проекцией спина s_z ($s_z = \pm 1/2$). Если магнитное поле равно нулю, то энергия электрона ϵ не зависит от направления спина, а определяется только импульсом:

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m_e}, \quad \text{или} \quad p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 2m_e \epsilon. \quad (2.18)$$

Построим систему координат, на осях которой отложим проекции импульса (рис. 23). Мы «создали» импульс-

ное пространство. Зависимость импульса от энергии (2.18) изобразится в этом пространстве сферой радиуса $\sqrt{2m_e\epsilon}$. Теперь представим себе, что все импульсное пространство разбито на бесконечно маленькие клеточки.

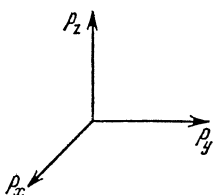


Рис. 23. Импульсное пространство. На осях координат откладываются проекции импульса частицы.

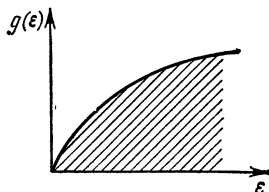


Рис. 24. Плотность состояний системы свободных электронов.

Каждая клеточка отвечает определенному значению импульса p . Число состояний (клеточек) dN_e с импульсами электронов между p и $p + dp$ пропорционально объему шарового слоя толщиной dp *) $4\pi p^2 dp \sim \sqrt{\epsilon} d\epsilon$ (см. (2.18)).

Функцию $g(\epsilon) = \frac{dN_e}{d\epsilon}$ называют плотностью состояний. Более последовательное рассмотрение позволяет установить не только то, что $g(\epsilon) \sim \sqrt{\epsilon}$, но и найти коэффициент пропорциональности:

$$g(\epsilon) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \hbar^3} V m_e^{3/2} \sqrt{\epsilon} \quad (2.19)$$

(V — объем образца металла). Площадь под кривой (2.19) (рис. 24) определяет число состояний с энергией, меньшей ϵ . Так как согласно принципу Паули каждое состояние может быть занято только одним электроном, то при $T = 0$ электроны заполняют все состояния вплоть до состояний с некоторой максимальной энергией — энергией Ферми ϵ_F .

Энергия Ферми определяется из того условия, чтобы до нее поместились все N_e электронов металла. Это означает, что для определения энергии Ферми надо проинтег-

*) Заметьте, мы сейчас интересуемся числом состояний с определенным значением величины импульса при произвольном его направлении.

приравнять плотность состояний от 0 до ϵ_F и приравнять N_e

$$N_e = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi^2\hbar^3} V m_e^{3/2} \epsilon_F^{3/2}.$$

Отсюда

$$\epsilon_F = \left(\frac{3\pi^2 N_e}{V} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_e}. \quad (2.20)$$

Отметим, что энергия Ферми ϵ_F с точностью до численного множителя $(3\pi^2)^{2/3}/2$ совпадает с величиной $kT_{\text{кв}}$.

Наглядное изображение заполнения состояний свободными электронами можно получить, если воспользо-

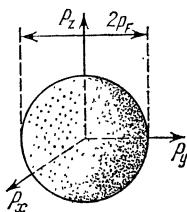


Рис. 25. При $T = 0$ электроны заполняют состояния с энергией, меньшей ϵ_F . В импульсном пространстве эти состояния находятся внутри сферы радиуса p_F .

ваться импульсным пространством: при $T = 0$ электроны в нем заполняют сферу (ферми-сферу) радиуса $p_F = \sqrt{2m_e\epsilon_F} = \hbar (3\pi^2 N_e/V)^{1/3}$ (рис. 25). Радиус ферми-сферы $p_F \approx \hbar/d$, где d — среднее расстояние между электронами (оно по порядку величины совпадает с размером ячейки кристалла a).

Мы видим, что при абсолютном нуле температуры не прекращается движение частиц. Принцип Паули «сильнее» стремления системы перейти при $T = 0$ в состояние с наименьшей энергией *).

На рис. 26, а показано распределение частиц газа по энергиям при $T = 0$. При отличной от нуля, но низкой температуре ($T \ll T_{\text{кв}}$) распределение по энергиям изменится незначительно (рис. 26, б).

* * *

Теперь мы можем вернуться к рассмотрению магнитных свойств электронов проводимости. Когда магнитное поле $\mathbf{H} \neq 0$, энергии электронов со спином по полю и

*) *Задача.* Вычислите среднюю энергию частицы ферми-газа при $T = 0$ и выразите ее через энергию Ферми ϵ_F .

против поля отличаются друг от друга. Отмечая направление спина стрелкой (по полю вверх, против — вниз), имеем (см. (1.28)):

$$\begin{aligned}\epsilon_{\uparrow} &= \frac{p^2}{2m_e} - \mu H, \\ \epsilon_{\downarrow} &= \frac{p^2}{2m_e} + \mu H.\end{aligned}\quad (2.21)$$

Здесь, как и раньше, $\mu = e\hbar/2m_e c$.

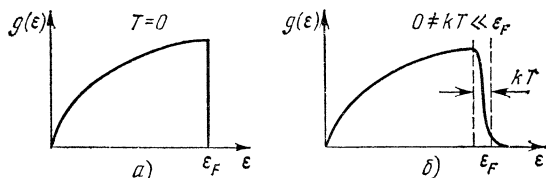


Рис. 26. Распределение частиц ферми-газа по энергиям при $T = 0$ (а); площадь под кривой $g = g(\epsilon)$ ($0 < \epsilon < \epsilon_F$) равна числу электронов. При $kT \ll \epsilon_F$ она лишь незначительно отличается от распределения при $T = 0$ (б).

Как в этом случае заполняют N_e электронов свои состояния (клеточки)? На рис. 27 изображено распределение электронов по энергиям, когда магнитное поле включено. Обратите внимание, что уровни заполнения у электронов со спином, направленным по полю, и со спином против — одинаковые (и ϵ_{\uparrow} и ϵ_{\downarrow} меньше ϵ_F^H). Если бы уровни заполнения были разными, то некоторые электроны «перепрыгнули» бы в состояния с другим направлением спина, и энергия системы понизилась бы.

Электронов со спином по магнитному полю несколько больше, чем электронов с противоположно направленными спинами $N_{\uparrow} > N_{\downarrow}$, так как энергия $\epsilon_{\uparrow} < \epsilon_{\downarrow}$. В результате электронный газ оказывается намагниченным по полю — *парамагнитным*. Для вычисления магнитного момента

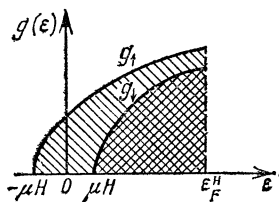


Рис. 27. Распределение частиц ферми-газа по энергиям в присутствии магнитного поля ($T = 0$): g_{\uparrow} — плотность состояний электронов с магнитным моментом по полю; g_{\downarrow} — против поля. Площадь под каждой из кривых равна числу соответствующих электронов.

электронного газа надо найти разность чисел электронов по полю и против:

$$M_e = \mu (N_{\uparrow} - N_{\downarrow}).$$

Для этого надо вычислить N_{\uparrow} и N_{\downarrow} . Это нетрудно, если заметить, что плотность состояний со спином в данном направлении $g_{\uparrow}(\epsilon)$ ($g_{\downarrow}(\epsilon)$) отличается от $g(\epsilon)$ только множителем 1/2 и началом отсчета энергий. Простой расчет, основанный на том, что энергия μH практически при любом достижимом магнитном поле H мала по сравнению с энергией Ферми ϵ_F *), показывает, что

$$M_e = \mu^2 \left(\frac{dN_e}{d\epsilon_F} \right)_{H=0} \cdot H,$$

а магнитная восприимчивость

$$\chi_{\Pi} = \frac{3\mu^2}{2} \frac{N_e}{\epsilon_F}. \quad (2.22)$$

Мы воспользовались выражением (2.19).

Парамагнетизм вырожденного электронного газа носит название *парамагнетизма Паули*.

Для того чтобы магнитная восприимчивость, как и раньше, относилась к единице объема, будем считать, что N_e — это число электронов проводимости в 1 см³.

Сравнивая формулу (2.22) с классической формулой (2.15), мы видим, что главное отличие заключается в замене kT на ϵ_F . Так как всегда $\epsilon_F \gg kT$, то ясно: учет квантовых эффектов — принципа Паули — существенно уменьшил величину парамагнитной восприимчивости по сравнению с ее классическим значением. Из-за вырождения в свойствах электронного газа температура не играет столь существенной роли, как в классических газах. В частности, парамагнитная восприимчивость Паули практически не зависит от температуры. Парамагнитная восприимчивость ферми-газа того же порядка величины, что и диамагнитная восприимчивость конденсированного тела **).

*) *Задача*. Покажите, что равенство $\mu H = \epsilon_F$ наступает при $H \approx 10^8$ Э. Самые грандиозные магниты создают магнитные поля, не превышающие $5 \cdot 10^5$ Э.

**) *Задача*. Покажите, что с точностью до множителей порядка единицы $\chi_{\Pi} \approx \left(\frac{1}{137} \right)^2$ (ср. с выводом формулы (2.16)).

§ 5. Металлы. Диамагнетизм Ландау

Рассказывая о диамагнетизме, мы постарались убедить читателя, что диамагнетизм — общее явление природы. Не является ли электронный газ исключением? Подозрение основано на таком «рассуждении». Вывод формулы для диамагнитной восприимчивости (2.13) основывался, как мы подчеркивали, на двух обстоятельствах: на теореме Лармора и на устойчивости орбит. Свободные электроны не имеют устойчивых орбит и к ним не применима теорема Лармора. И все же электронный газ обладает наряду с парамагнитной и *диамагнитной* восприимчивостью, так называемым диамагнетизмом Ландау. Вывести формулу для диамагнитной восприимчивости электронного газа сложно, поэтому мы ее просто приведем:

$$\chi_{\text{л}} = -\frac{1}{3} \chi_{\text{п}}. \quad (2.23)$$

Откуда же взялся диамагнетизм у электронного газа? У свободных электронов дискретных стационарных состояний при $\mathbf{H} = 0$ нет. Но они появляются при $\mathbf{H} \neq 0$. Говорят, что

движение электронов в магнитном поле квантуется.

Природа квантования движения электронов в магнитном поле проста. Под действием силы Лоренца (1.20) электрон вращается вокруг \mathbf{H} с частотой обращения *) $\omega_c = eH/m_e c$ (рис. 28). Кроме того, электрон, конечно, движется вдоль поля. Это его движение вовсе не затронуто силой Лоренца. Энергия электрона есть сумма энергий движения по полю и в плоскости, перпендикулярной к полю. Рассмотрим движения электрона в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Слово «рассмотрим» здесь надо воспринимать буквально, а не в переносном смысле слова. Так вот, если сбоку посмотреть на вращающийся электрон, то видно, что он совершает колебания с циклотронной частотой ω_c (см. рис. 28). Это не просто словесная аналогия. Формулы, описываю-

*) С такой частотой вращается электрон в циклотроне. Поэтому ее называют *циклотронной*. Заметьте, $\omega_c = 2\omega_L$, где ω_L — ларморова частота прецессии. Теорема Лармора (стр. 80) не относится к движению свободных электронов, так как в этом случае лоренцову силу нельзя рассматривать как малое возмущение. Нет другой (большой) силы, по сравнению с которой она была бы мала.

шие движение электрона в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, сводятся к формулам, описывающим колебания частицы. О том, что частица, колеблющаяся с частотой ω , может иметь только дискретные

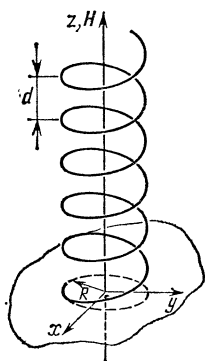


Рис. 28. Электрон в магнитном поле H движется по спирали, радиус которой равен $R = m v_{\perp} / |e| H$, шаг спирали (вдоль магнитного поля) равен

$$d = v_z / \omega_c = m v_z / |e| H;$$

$$v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

уровни энергии $\epsilon_n = \hbar \omega (n + 1/2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$ — целые числа), вы уже знаете (см. стр. 29).

Прочтите, пожалуйста, еще раз последний абзац. Теперь думаем, вас не слишком удивит, что

энергия движения электрона в магнитном поле может принимать следующие значения:

$$\epsilon = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_H^2}{2m_e}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

p_H — проекция импульса \mathbf{p} на \mathbf{H} .

Если учесть существование собственного магнитного момента у электрона, то уровни (2.24) расщепятся на две системы уровней:

$$\epsilon_{\uparrow} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + \frac{p_H^2}{2m_e} - \mu H,$$

$$\epsilon_{\downarrow} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + \frac{p_H^2}{2m_e} + \mu H.$$

К чему приводит это расщепление, мы уже знаем — к парамагнетизму Паули. Поэтому пока не будем его учитывать.

Знание уровней энергии электронов (2.24) позволяет вычислить его магнитный момент и определить магнитную восприимчивость. Если не учитывать магнитных мо-

ментов электронов, то электронный газ диамагнитен, а

$$\chi_{\text{л}} = -\frac{1}{12} \frac{e^2 \hbar^2}{m_e^2 c^2} \frac{N_e}{\epsilon_F} = -\frac{1}{3} \chi_{\text{П}}.$$

Если учесть и диамагнетизм и парамагнетизм электронного газа, то мы приходим к формуле для суммарной магнитной восприимчивости (см. формулу (2.22)):

$$\chi_e = \chi_{\text{П}} - \frac{1}{3} \chi_{\text{П}} = \frac{2}{3} \chi_{\text{П}} = \mu^2 \frac{N_e}{\epsilon_F}. \quad (2.25)$$

Она положительна, т. е. парамагнетизм превалирует. Чем же объяснить, что некоторые металлы диамагнитны? Конечно, есть еще ионный остов металла. Он диамагнитен (см. выше) и его восприимчивость должна вычитаться из χ_e . А так как χ_e численно мала, то знак магнитной восприимчивости металла может быть и положительным и отрицательным. Это соображение (совершенно правильное!), однако, не может объяснить большого диамагнетизма ряда металлов (например, висмута).

Для полного объяснения магнитных свойств электронного газа необходимо учесть факт, не отраженный в модели Друде — Лоренца — Зоммерфельда. Электроны проводимости движутся не в пустоте, а в поле сил, создаваемых ионами кристаллической решетки. Изучением движения электронов в периодическом поле кристаллической решетки занимается специальная глава квантовой физики твердого тела — *зонная теория*. Один из выводов этой теории гласит: в ряде случаев движение электрона в решетке можно считать квазисвободным *), заменив в выражении (2.18) обычную массу электрона m_e — эффективной m^* , т. е. считая, что

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m^*}. \quad (2.26)$$

Отличие эффективной массы от обычной учитывает взаимодействие электрона с ионами решетки.

Как изменятся выписанные выше формулы из-за замены $m_e \rightarrow m^*$? Так как величина магнетона Бора μ в эту замену не включается (собственный магнитный момент электрона столь же «интимная» характеристика

*) Частица «квази» (латинское quasi — якобы, почти) иногда позволяет «спрятать концы в воду». Лучше всего введение приставки «квази» трактовать так: «Не так все просто, как утверждают авторы в тексте» (см.: М. И. К а г а н о в. Электроны, фононы, магноны, — М.: Наука, 1979, а также гл. 3, § 8),

электрона, как и его заряд e , оба они не связаны с движением электрона в решетке *), то из формул (2.22) и (2.25) легко получить:

$$\chi_e = \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{m_e}{m^*} \right)^2 \right] \chi_{\Pi}; \quad \chi_{\Pi} = \frac{3}{2} \frac{\mu^2 N_e}{\epsilon_F^*}; \quad \epsilon_F^* = \left(\frac{3\pi^2 N_e}{V} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m^*}. \quad (2.27)$$

Эффективная масса электрона бывает меньше его «настоящей» массы, иногда, как это ни парадоксально, даже во много раз. Эти металлы заведомо диамагнитны. Так объясняется большой диамагнетизм Bi.

§ 6. Сверхпроводники — идеальные диамагнетики

Если из всего рассказа о диамагнетизме Ландау постараться сделать содержательную «выжимку» и сформулировать причину его возникновения, то, пожалуй, останется вот что: диамагнетизм возникает благодаря вращению электронов вокруг магнитных силовых линий. А то, что для расчета надо применять законы квантовой механики, очевидно: ведь речь идет о движении микроскопических частиц — электронов.

Каждый электрон проводимости движется независимо от других. То, что циклотронная частота $\omega_c = e\hbar/m_e c$ одна и та же для всех электронов, в каком-то смысле случайность. В более строгой теории, учитывающей поле ионов, это свойство не сохраняется: скорость вращения электронов зависит от их энергии и от проекции импульса на магнитное поле. Это обстоятельство несколько изменяет формулы квантования и, тем самым, меняет величину диамагнитной восприимчивости.

А могут ли электроны под действием магнитного поля вращаться вокруг него как нечто целое — ну, скажем, как движется вода во вращающемся сосуде? В обычных условиях, безусловно, нет. Согласованное вращение

*) Это сказано, пожалуй, слишком сильно: в некоторых проводниках существенно взаимодействие собственного магнитного момента электрона с орбитальным магнитным моментом электронов и ионов (оно называется *спин-орбитальным*). Из-за спин-орбитального взаимодействия изменяется собственный магнитный момент электрона. Кроме того, магнитный момент электрона ощущает результат взаимодействия с другими электронами. Это также может изменить значение μ . Важно то, что $\mu \neq e\hbar/2m^*c$ и поэтому заведомо $\chi \neq 2/3\chi_{\Pi}$.

электронов означает, что по проводнику течет макроскопический ток. Но проводник должен нагреваться, а ток — затухать. Магнитное поле, которое при своем включении возбудило это движение, не может поддерживать ток, так как не производит работы. Итак, согласованного движения электронов нет!

Но ... всегда есть исключения из правил. И всегда эти исключения подтверждают правила — правда, если разобраться, почему исключение возможно. Большинство металлов при очень низких температурах (вблизи абсолютного нуля) переходят в своеобразное *сверхпроводящее состояние* *), характеризующееся равным нулю сопротивлением. Металлы в сверхпроводящем состоянии называют сверхпроводниками. Мы их уже упоминали в первом параграфе этой главы.

В сверхпроводниках могут течь незатухающие токи. Сверхпроводимость была открыта в 1911 г. Х. Камерлинг — Оннесом при измерении проводимости ртути и долгие годы причина возникновения сверхпроводящего состояния была загадкой. Только через 45 лет (в 1956 г.) Бардин, Купер и Шриффер построили микроскопическую теорию этого уникального явления. Мы, к сожалению, лишены возможности рассказать о сверхпроводимости подробно. Ограничились констатацией: в сверхпроводниках могут течь незатухающие токи. Как это отразится на их магнитных свойствах?

У электронов возникает возможность вообще вытолкнуть магнитные силовые линии из толщи металла. Для этого по поверхности сверхпроводника должен протекать ток, создающий магнитный момент \mathcal{M} , направленный противоположно магнитному полю и равный по величине $\frac{1}{4\pi}HV$. И так, в сверхпроводнике $B = H + 4\pi\mathcal{M} = 0$, и

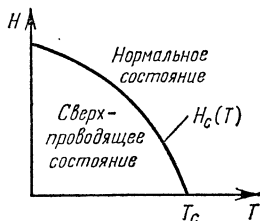


Рис. 29. Диаграмма состояния сверхпроводника. Кривая $H = H_c(T)$ отделяет нормальное состояние от сверхпроводящего.

*) На сегодняшний день самая высокая температура сверхпроводящего перехода у Nb_3Ge . Она равна 23° . Когда мы писали эту книгу, мы оставили свободными места для названия вещества и рекордно высокой температуры перехода. Все время идут поиски высокотемпературных сверхпроводников. Приведенное здесь вещество открыто в 1973 г.

сверхпроводник—идеальный диамагнетик.

Мы пишем: «у электронов возникает возможность», «по поверхности ... *должен* протекать ток». Это риторический прием. В сверхпроводниках, помещенных в магнитном поле, именно так и происходит: возникает поверхностный ток, благодаря которому магнитные силовые линии выталкиваются из толщи сверхпроводника.

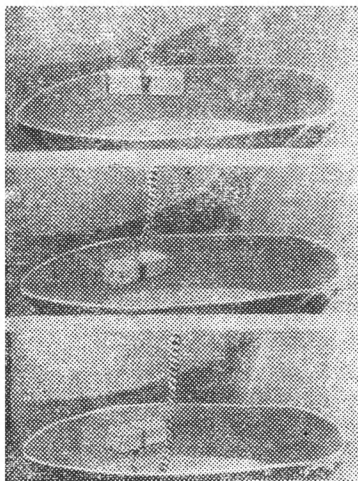


Рис. 30. Магнитная подушка. Магнит, парящий над сверхпроводящей тарелкой.

Этот эффект носит название *эффекта Мейсснера*. Магнитное поле выталкивается потому, что это энергетически выгодно — энергия металла при $B = 0$ меньше, чем при $B \neq 0$. (Строго говоря, ток в сверхпроводнике течет не по поверхности, а в приповерхностном слое толщиной $\delta \approx 10^{-5}$ см.)

И еще одно замечание: описанное здесь поведение сверхпроводников наблюдается в сравнительно слабых магнитных полях. Сильное магнитное поле разрушает сверхпроводимость — под его воздействием металл переходит в нормальное (несверхпроводящее) состояние. На рис. 29 изображена диаграмма состояния сверхпроводника. Видна граница существования сверхпроводящего состояния.

Выталкивание магнитного поля из сверхпроводника наглядно демонстрируется парением магнетика над сверхпроводником *) (рис. 30).

*) *Задача.* Объясните, почему магнит, изображенный на рис. 30, не падает. Впервые эксперимент с парящим магнитом был продемонстрирован В. К. Аркадьевым в 1945 г. В настоящее время это явление находит техническое применение.

ФЕРРОМАГНЕТИЗМ

Среди твердых тел есть такие, которые *самопроизвольно*, под действием внутренних сил, намагничиваются и потому могут служить макроскопическими источниками магнитного поля. Это — *ферромагнетики*. Ферромагнетизм существует не при всех температурах. При повышении температуры собственный спонтанный магнитный момент тела уменьшается и при некоторой

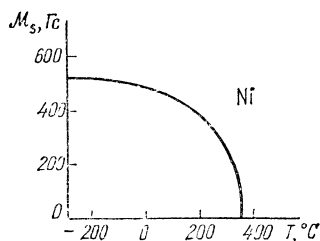


Рис. 31. Зависимость спонтанного магнитного момента Ni от температуры.

температуре T_c , называемой *температурой Кюри*, обращается в нуль (конечно, если отсутствует магнитное поле, т. е. при $H = 0$). Выше температуры Кюри ферромагнетики суть парамагнетики.

Все ферромагнетики при высокой температуре — парамагнетики, но не все парамагнетики при низкой температуре — ферромагнетики.

Значения температуры Кюри T_c и плотности спонтанного магнитного момента M_s (при $T \rightarrow 0$) у различных материалов различны (см. табл. V).

Температурная зависимость плотности спонтанного магнитного момента $M_s(T)$ никеля показана на рис. 31.

Т а б л и ц а V

Вещество	Fe	Co	Ni
M_s , эрг/Гс	1735	1445	509
T_c , К	1043	1403	631

§ 1. Атомные магнетики упорядочивают сами себя

Исследование физических систем, состоящих из макроскопического числа частиц, взаимодействующих друг с другом, — одна из сложнейших задач квантовой физики. Хотя существуют достаточно общие методы решения таких задач, единый рецепт отсутствует. В каждом конкретном случае приходится создавать более или менее адекватную модель, упрощая задачу настолько, чтобы она допускала последовательное математическое решение.

Сравнение с экспериментом, оценка отброшенных членов позволяют установить область применения модели. Часто модель описывает ситуацию «в общих чертах», отклоняясь от истины в подробностях.

Это краткое предисловие имеет целью предупредить читателя: то, что будет рассказано в данном параграфе, — упрощенная модель ферромагнетизма, модель, улавливающая поведение системы, но не претендующая на детальное описание. Называется она *моделью самосогласованного поля*. Такое название она получила после того, как нашла себе применение в разных областях физики конденсированного состояния. В применении к ферромагнетизму ее называют *моделью Кюри — Вейсса*, так как она объяснила происхождение закона Кюри — Вейсса (см. стр. 67, формулу (2.2)).

Мы будем исходить из факта существования газа магнитных стрелок, ведь каждый ферромагнетик, как уже было сказано, при высокой температуре — парамагнетик. Для дальнейшего представьте себе кристалл, в каждом узле которого атом, снабженный стрелочкой — магнитным моментом (рис. 32).

Чтобы избежать громоздких расчетов, будем считать: $J = 1/2$, $g = 2$, а m_J имеет два значения $+1/2$ и $-1/2$; магнитный момент отдельного атома равен магнетону Бора μ . Это не то упрощение, о котором шла речь выше. От этого упрощения легко отказаться и рассматривать газ магнитных стрелок с произвольным значением момента количества движения J каждого магнетика.

В большинстве случаев считают, что магнитные моменты атомов, из которых состоит ферромагнетик, имеют не орбитальное, а спиновое происхождение. В чем дело?

Почему игнорируют орбитальный магнитный момент?

В атоме электроны движутся в поле с центральной симметрией; поэтому их момент количества движения сохраняется и может служить характеристикой стационарного состояния атома. В твердом теле поле сил, в котором движутся электроны, не имеет центральной симметрии, момент количества движения не сохраняется, и для характеристики электронного движения приходится использовать другие физические величины (мы не можем на этом останавливаться). Спин атома слабо

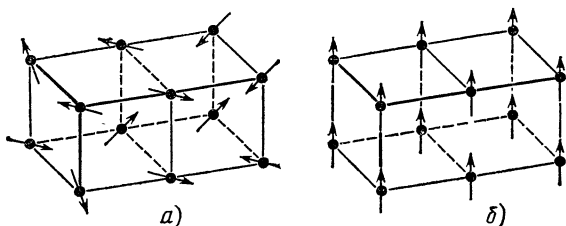


Рис. 32. Кристалл, состоящий из парамагнитных атомов: а) температура T выше температуры Кюри T_c ; б) $T = 0$, все моменты направлены в одну сторону.

связан с орбитальным движением электронов. Поэтому его можно считать «хорошим» квантовым числом. Взаимодействие спинов друг с другом, а также с орбитальным движением электронов только ориентирует атомные спины в пространстве — величина каждого спина атома при этом не изменяется. Изменение сопряжено с большим проигрышем энергии и поэтому маловероятно (стр. 75). Эти соображения и позволяют пользоваться представлением о газе магнитных стрелок, понимая под магнитной стрелкой спиновый магнитный момент атома.

Модель Кюри — Вейсса заключается в упрощающем предположении о том, что магнитный момент упорядочивается не только внешним магнитным полем H , но и совокупным действием всех магнитных моментов, которое сводится к замене магнитного поля H эффективным самосогласованным полем *):

$$H_{\text{эфф}} = H + \alpha M. \quad (3.1)$$

*) Это действительно фундаментальное упрощение. Мы его еще обсудим.

Это выражение мы постараемся обосновать в следующем параграфе, но для модели Кюри — Вейсса формула (3.1) — исходная; постоянная α должна быть связана с наблюдаемыми величинами и, таким образом, определена из опыта.

Пользуясь формулами (2.8) и (3.1), мы находим transcendентное уравнение для определения плотности магнитного момента \mathcal{M} ферромагнетика — уравнение Кюри — Вейсса:

$$\mathcal{M} = N\mu \operatorname{th} \frac{\mu(H + \alpha\mathcal{M})}{kT}, \quad (3.2)$$

где N — число атомов в единице объема.

Дальнейшее содержание параграфа — исследование этого уравнения и его решений.

Начнем с самого главного: выясним, описывает ли уравнение Кюри — Вейсса ферромагнетизм, т. е. возникновение спонтанной — в отсутствие магнитного поля — намагниченности \mathcal{M}_s . Для этого проанализируем решение уравнения (3.2) при $H = 0$:

$$\mathcal{M}_s = N\mu \operatorname{th} \alpha \frac{\mu\mathcal{M}_s}{kT}. \quad (3.3)$$

Обозначим

$$x = \alpha \frac{\mu\mathcal{M}_s}{kT}, \quad b = \frac{kT}{\alpha\mu^2N}.$$

В этих обозначениях уравнение (3.3), как легко проверить, можно переписать в виде

$$bx = \operatorname{th} x, \quad (3.3')$$

удобном для графического анализа. Рассмотрим рис. 33. Видно, что при $b > 1$ уравнение имеет только одно решение, $x = 0$, а при $b < 1$ — три. Неравенство $b > 1$ означает, что $T > \alpha \frac{\mu^2N}{k}$. Если $\alpha > 0$, то, следовательно, при высоких температурах спонтанная намагниченность (согласно уравнению (3.3)) равна нулю ($\mathcal{M}_s = 0$). Величину $\alpha \frac{\mu^2N}{k}$ естественно считать равной температуре Кюри T_c , ведь именно при $T = T_c$ исчезает спонтанная намагниченность. Итак,

$$\alpha \frac{\mu^2N}{k} = T_c.$$

Правда, нам предстоит еще проверить, описывает ли уравнение (3.2) парамагнетизм газа магнитных стрелок при $T > T_c$. А пока запомним, что $\alpha > 0$.

Но что означает существование трех решений при $T < T_c$? Ясно, что из них надо выбрать одно. По какому принципу? Ответ таков: решение $\mathcal{M}_s = 0$ неустойчиво и потому не осуществляется, отличные от нуля решения ($\mathcal{M}_s \neq 0$) устойчивы. Осуществляется одно из них. О том, какое из двух, пока можно не заботиться: они отличаются только направлением вектора \mathcal{M}_s , а нас интересует величина этого вектора.

Если бы речь шла об одной частице, то устойчивые и неустойчивые состояния можно было бы

изобразить с помощью зависимости потенциальной энергии U от координаты x . Пусть

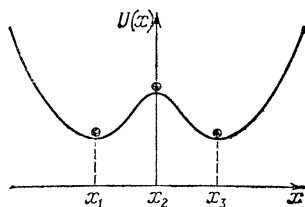


Рис. 34. Потенциальная энергия частицы: в точках x_1, x_3 сила, действующая на частицу, равна нулю; в точках x_1 и x_3 частица находится в устойчивом положении, а в точке x_2 — в неустойчивом.

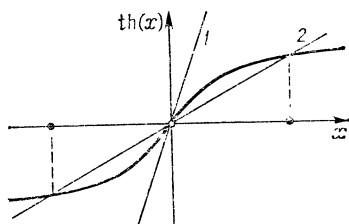


Рис. 33. Графическое решение уравнения Кюри-Вейсса (3.3): 1 — прямая, тангенс угла которой b больше единицы; 2 — прямая, тангенс угла которой b меньше единицы. Точки на оси абсцисс — корни уравнения (3.3).

потенциальная энергия имеет вид, изображенный на рис. 34. Сила, действующая на частицу, равна нулю в трех точках, где $U(x)$ имеет экстремум: $x_1 = -x_3 \neq 0$, $x_2 = 0$. Но положение частицы устойчиво только в точках x_1 и x_3 (где $U(x)$ минимальна). Из точки $x_2 = 0$ (где $U(x)$ максимальна) частица скатится при любом случайном воздействии.

Статистическая физика формулирует строгое правило, позволяющее отличить устойчивое решение уравнения

Кюри — Вейсса от неустойчивого. Оно очень похоже на правило, сформулированное выше. Надо найти то значение \mathcal{M}_s , при котором имеет минимум некоторая величина, называемая *свободной энергией*. Свободная энергия

отличается от просто энергии тем, что учитывает число способов, которыми можно создать данное макроскопическое состояние с заданной энергией. Устойчиво то состояние, которое может быть реализовано максимальным числом способов. Так вот, если $T < T_c$, свободная энергия *максимальна* при $\mathcal{M}_s = 0$.

Выясним теперь, как зависит \mathcal{M}_s от температуры при $T < T_c$. Начнем с области температур, непосредственно примыкающей к температуре Кюри ($T \lesssim T_c$). При $T = T_c$ плотность магнитного момента $\mathcal{M}_s = 0$. Ясно, что при $T \approx T_c$ магнитный момент очень мал. Это позволяет использовать приближенное выражение для $\text{th } x$:

$$\text{th } x \approx x - \frac{1}{3} x^3, \quad x \ll 1.$$

Подставляя значение $\text{th } x$ в уравнение (3.3'), мы видим, что на x можно сократить (нулевое решение нас не интересует), а ненулевое значение $|x|$ таково:

$$|x| = \sqrt[3]{3(1-b)}.$$

Теперь надо вернуться к физическим переменным:

$$\mathcal{M}_s = N\mu \sqrt[3]{3\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}. \quad (3.4)$$

Обратите внимание, что, выписывая множитель перед корнем, мы заменили T на T_c . Приближение для $\text{th } x$, которое мы использовали, требует такой замены.

При температурах значительно ниже температуры Кюри ($T \ll T_c$) надо воспользоваться значением $\text{th } x$ при больших значениях x :

$$\text{th } x \approx 1 - 2e^{-2x}, \quad x \gg 1$$

и

$$\mathcal{M}_s = N\mu \left(1 - 2e^{-\frac{2T_c}{T}}\right), \quad T \ll T_c. \quad (3.5)$$

Здесь использованное приближение потребовало заменить в экспоненте величину \mathcal{M}_s ее значением при $T = 0$ ($\mathcal{M}_s|_{T=0} = N\mu$).

Мы видим, что уравнение Кюри — Вейсса описывает полное намагничение ферромагнетика при $T = 0$ — все магнитные моменты параллельны, и $\mathcal{M}_s = N\mu$. С ростом температуры плотность магнитного момента уменьшается, причем в момент исчезновения, при $T = T_c$, производная $d\mathcal{M}_s/dT$ обращается в бесконечность.

Сравнение формул (3.4) и (3.5) с рис. 31 показывает, что они в общих чертах правильно описывают температурную зависимость $\mathcal{M}_s(T)$. В таких случаях в научных статьях пишут: «Есть качественное согласие между теорией и экспериментом». Слово «качественное» подчеркивает, что автор не отвечает за количественное согласие. В данном случае особенно отчетливо *количественное* несовпадение результатов эксперимента с теорией видно при низких температурах: при $T \ll T_c$ спонтанный магнитный момент значительно медленнее стремится к насыщению $\mathcal{M}_s|_{T \rightarrow 0} = N\mu$, чем это предсказывает формула (3.5).

О более точном сравнении мы поговорим дальше, а сейчас вычислим магнитную восприимчивость ферромагнетика выше и ниже температуры Кюри. При вычислении магнитной восприимчивости мы должны считать магнитное поле H бесконечно малым *). При $T > T_c$ бесконечно малому полю соответствует бесконечно малая плотность магнитного момента. Поэтому в уравнении (3.2)

$\text{th} \left[\frac{\mu (H + \alpha \mathcal{M})}{kT} \right]$ можно заменить его аргументом, т. е.

$$\mathcal{M} = \frac{N\mu^2 (H + \alpha \mathcal{M})}{kT},$$

или

$$\mathcal{M} = \frac{N\mu^2}{k(T - T_c)} H, \quad T > T_c, \quad H \rightarrow 0.$$

Отсюда

$$\chi = \frac{N\mu^2}{k(T - T_c)} \quad \text{при} \quad T > T_c, \quad (3.6)$$

и мы видим, что из уравнения Кюри — Вейсса следует закон Кюри — Вейсса, т. е. модель самосогласованного поля правильно описывает парамагнитное состояние ферромагнетика при $T > T_c$.

При $T < T_c$ дело обстоит немного сложнее, так как ниже температуры Кюри есть как спонтанный магнитный момент $\mathcal{M}_s(T) = \mathcal{M}(T, H = 0)$, так и наведенный, пропорциональный H :

$$\mathcal{M}(T, H) = \mathcal{M}_s(T) + \chi H, \quad \mu H \ll kT.$$

*) Формально магнитной восприимчивостью χ называется производная $d\mathcal{M}/dH$ при $H \rightarrow 0$. Когда намагниченность линейно зависит от H , то это определение χ совпадает с использованным ранее.

В непосредственной близости к точке Кюри и при стремлении H к нулю оба слагаемых очень малы, что позволяет пользоваться приближенным значением гиперболического тангенса. Несложные выкладки приводят к следующему выражению:

$$\chi = \frac{N\mu^2}{2k(T_c - T)} \quad \text{при } T \lesssim T_c. \quad (3.7)$$

Зависимость χ от температуры изображена на рис. 35. Отметим: если отсчитывать температуру от точки Кюри, то слева (при $T \lesssim T_c$) χ вдвое меньше, чем на том же расстоянии справа (при $T \gtrsim T_c$) *).

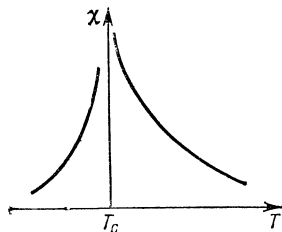


Рис. 35. Зависимость от температуры магнитной восприимчивости ферромагнетика χ вблизи температуры Кюри T_c .

Соберем вместе выводы, которые можно сделать (и которые мы уже делали) из анализа решения уравнения Кюри—Вейсса.

1. Предположение о том, что существует внутреннее поле, пропорциональное намагниченности ($\alpha > 0$), позволило объяснить появление собственной намагниченности при $T < T_c$.

2. Введенный в теорию параметр α определяет температуру Кюри: $kT_c = \alpha\mu^2 N$. Так как $\mu N = \mathcal{M}_s |_{T=0} = \mathcal{M}_{s0}$, то $\alpha = kT_c / \mu \mathcal{M}_{s0}$. Параметр $\alpha \gg 1$. Это можно проверить, воспользовавшись таблицей V (на стр. 99) и величиной магнетона Бора μ .

3. Магнитный момент падает с повышением температуры и $-\frac{d\mathcal{M}_s}{dT} \Big|_{T=T_c} = \infty$.

4. Магнитная восприимчивость возрастает при приближении к точке Кюри, обращаясь в бесконечность при $T = T_c$. При $T \rightarrow 0$ магнитная восприимчивость χ экспоненциально мала **); при $T > T_c$ уравнение Кюри—Вейсса приводит к закону Кюри—Вейсса.

*) *Задача.* Выведите все формулы этого параграфа для $J = 1$, а еще лучше — для произвольного J . Это, возможно, самая сложная из предлагаемых задач.

**) *Задача.* Покажите, что согласно уравнению Кюри—Вейсса

$$\chi = \left(\frac{d\mathcal{M}}{dH} \right)_{H \rightarrow 0} \sim e^{-\frac{2T_c}{T}} \quad \text{при } T \rightarrow 0 \text{ (см. примечание на стр. 105).}$$

§ 2. Ферромагнетизм — результат действия обменных сил

Проанализируем еще раз модель Кюри — Вейсса. Ясно, что ее зерно, ее главное содержание заключено в связи эффективного поля $H_{\text{эфф}}$ с плотностью магнитного момента. Эта связь, по нашему предположению, учитывает взаимодействие магнитных моментов атомов. Но откуда взялось выражение (3.1)? Можно, конечно, не задавать этот вопрос. Можно написать «из головы» формулу, исследовать ее следствия (мы это уже проделали), показать, каким образом константы (α , $N\mu$), входящие в уравнение, могут быть связаны с величинами, известными из эксперимента (T_c , \mathcal{M}_{s0}), убедиться в неплохом согласии предсказываемой зависимости \mathcal{M}_s от температуры с опытными данными и ограничиться этим. Но тогда надо ясно сознавать, что мы построили не микроскопическую, а *феноменологическую*, т. е. описательную теорию — теорию, описывающую феномен (явление), а не объясняющую его. Надо отдавать себе отчет, что мы не знаем происхождения основного выражения (в данном случае (3.1)), не знаем, какова природа (физический смысл) множителя α , как он связан с микроскопическими атомными магнетиками и их взаимодействием друг с другом.

Задача этого параграфа — раскрыть физический смысл модели Кюри — Вейсса.

Вернемся к рис. 32. Стрелки, изображающие магнитные моменты атомов, за счет взаимодействия друг с другом выстраиваются параллельно, а тепловое движение разрушает этот порядок. Какие силы действуют между атомными магнетиками? Мы об этом много говорили в первой главе (см. § 10) и установили, что

обменные силы на атомных расстояниях во много раз больше, чем магнитно-дипольные силы.

Поэтому именно обменные силы ответственны за ферромагнетизм. Чтобы в этом убедиться, воспользуемся спинным гамильтонианом (1.39), который мы обобщим, считая, что между двумя любыми атомами кристалла существует обменное взаимодействие:

$$\mathcal{H}_s = E - \sum_{i, k} A_{ik} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_k. \quad (3.8)$$

Суммирование ведется по всем атомам кристалла, а индексы i и k нумеруют его атомы. Вспомним теперь сказанное о зависимости A от расстояния между атомами: обменные интегралы A_{ik} очень быстро уменьшаются с расстоянием. Поэтому, хотя формально любой атом кристалла связан обменным взаимодействием со всеми атомами, существенна связь только соседних атомов. Это соображение позволяет переписать выражение (3.8) так:

$$\mathcal{H}_s = E - \frac{1}{2} A \sum_i s_i \sum_k' s_k. \quad (3.8')$$

Штрих у знака суммы означает, что при суммировании по k учитываются только соседи, ближайшие к i -му атому.

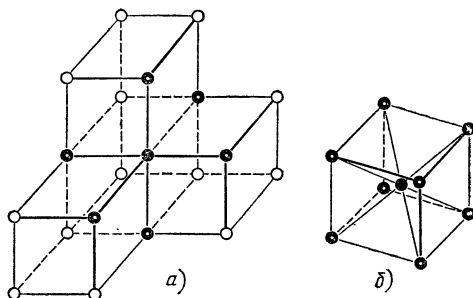


Рис. 36. Ближайшие соседи выделенного атома: а) в простой кубической решетке их шесть; б) в объемноцентрированной — восемь.

На рис. 36 видно, что для простой кубической решетки число ближайших соседей равно шести, а для объемноцентрированной — восьми (мы будем рассматривать только кубические решетки). Обменный интеграл вынесен из-под знака суммы, так как образец однороден — все обменные интегралы одинаковы; половинка появляется из-за того, что при таком суммировании атомы учитываются дважды.

Векторы s_i и s_k , конечно, «квантовые». Каждый из них может ориентироваться в пространстве $2s + 1$ способом. Если $s = 1/2$, то только двумя: либо по ..., либо против Выбор оси квантования, т. е. направления, относительно которого ориентируются спины, мы отло-

жим на дальнейшее. При абсолютном нуле температуры все магнитные моменты, а следовательно, и спины, параллельны друг другу. Во всяком случае именно это следовало из решения уравнения Кюри — Вейсса: $M_{s0} = N\mu$. Когда все спины параллельны друг другу, то согласно (3.8') зависящая от ориентации спинов энергия кристалла есть

$$E_s = -\frac{zANs^2}{2}, \quad (3.9)$$

где число z — число ближайших соседей. При $T = 0$ энергия кристалла должна быть самой меньшей из всех возможных. Это, конечно, относится и к ее спиновой части. Видно, что для того чтобы параллельное расположение спинов соответствовало наименьшей энергии, необходимо, чтобы обменный интеграл A был положительным:

$A > 0$ — условие ферромагнетизма.

При отличной от нуля температуре магнитные моменты не столь дисциплинированы: при очень низкой температуре отдельные спины отклонены от общего, правильного направления, с ростом температуры число «неправильных» спинов возрастает, а в результате суммарный магнитный момент уменьшается. Наконец, при некоторой температуре — это и есть температура Кюри T_c — все разрешенные направления оказываются равновероятными, и магнитный момент ферромагнетика обращается в нуль. При $T > T_c$ ферромагнетик ведет себя как парамагнетик.

Не нужно думать, что нарисованная картина статична. Не зависят от времени средние числа «правильных» и «неправильных» спинов, но если бы мы могли следить за спином отдельного атома, то обнаружили бы, что его направление все время меняется: то он «смотрит» в одну сторону, то в другую. Это и есть хаотическое тепловое движение спинов.

При температурах вблизи абсолютного нуля тепловое движение спинов можно проанализировать более детально. Этому посвящен § 10 этой главы.

Качественная картина разрушения магнитного порядка, которую мы нарисовали, считая, что при абсолютном нуле все спины благодаря обменному взаимодействию параллельны друг другу, не дает нам возможности

вывести из спинового гамильтониана выражение для эффективного поля (3.1). Более того: этого сделать нельзя. Чтобы разъяснить это грустное утверждение, поступим так.

Свяжем $H_{\text{эфф}} = \alpha \mathcal{M}_s$ (мы положили $H = 0$) с энергией *) системы. Для этого обобщим формулу (1.26) для энергии магнитного момента во внешнем поле. Согласно этой формуле $H = -\frac{d\mathcal{E}_M}{dM}$, когда векторы \mathbf{H} и \mathbf{M} параллельны. Чтобы эта формула имела место и для эффективного поля, нам следует считать, что

$$\mathcal{E}_M = -\frac{1}{2} \alpha \mathcal{M}_s^2 V, \quad (3.10)$$

где V — объем образца. Напомним, что полный момент ферромагнетика $\mathbf{M} = \mathcal{M} \mathbf{V}$.

Мы видим, что в модели Кюри — Вейсса свободная энергия системы однозначно определена намагниченностью. В действительности же, как видно из формул (3.8), (3.8'), она существенно зависит от микроскопического распределения спинов отдельных атомов. *Пренебрежение этим обстоятельством и есть главное упрощение в модели Кюри — Вейсса или, более общо, в модели самосогласованного поля.*

Однако формула (3.10) нужна нам не только для негативных утверждений, констатирующих нашу беспомощность. Она помогает «привязать» модель Кюри — Вейсса к реальным обменным силам, обеспечивающим существование ферромагнетизма. Для этого сравним формулу (3.9) с (3.10), подставив в нее вместо плотности магнитного момента \mathcal{M}_s при $T = 0$ его значение $N\mu$, а вместо V единицу (тогда N — число атомов в единице объема). Обе формулы совпадают, если принять:

$$\alpha = \frac{z}{4} \frac{A}{\mu^2 N} = \frac{z}{4} \frac{A}{\mu \mathcal{M}_{s0}} \quad \text{или} \quad kT_c = \frac{z}{4} A. \quad (3.11)$$

Конечно, именно последняя формула — главный позитивный результат этого параграфа. Обменный интеграл A — микроскопический параметр, значение которого определяется структурой атома, расстоянием атомов друг от друга, т. е. размером ячейки кристалла. Его вычисление — задача атомной физики. Выяснилось же, что

*) При $T \neq 0$ речь идет о свободной энергии (см, стр. 103).

обменный интеграл A определяет одну из основных характеристик ферромагнетика — его температуру Кюри.

Формула (3.11), кроме того, позволяет оценить численно параметр $\alpha \approx \frac{A}{\mu_0 M_{s0}}$. Вспомните, что говорилось об обменном интеграле в § 10 гл. 1: он электростатического происхождения. Оценим теперь величину $\mu_0 M_{s0} = \mu^2 N$. Она, как и A , имеет размерность энергии. Так как N — это число атомов в единице объема, то $N \approx 1/a^3$, где a , как всегда, межатомное расстояние. Поэтому $\mu^2 N \approx \mu^2/a^3$ — энергия магнитного диполь-дипольного взаимодействия. На стр. 52 мы показали, что она во много раз меньше энергии электростатического взаимодействия $U_{\text{кул}}$, а значит, и A . Итак, в соответствии со сказанным выше (на основании сравнения с опытными данными), $\alpha \gg 1$.

Ферромагнитные металлы

Прочитанный вами параграф — центральный в этой главе, так как объясняет природу возникновения ферромагнетизма. Однако он может вызвать недоумение. Действительно; наиболее известные ферромагнетики — железо, кобальт, никель — металлы. Почему же мы ничего не говорим о свободных электронах, а рассуждаем так, будто имеем дело с диэлектриком? Можно было бы сослаться на то, что есть много ферромагнитных диэлектриков, и к ним проведенное рассмотрение имеет непосредственное отношение. Но, по существу, оно подходит и к ферромагнитному металлу. Дело в том, что у атомов всех ферромагнитных металлов не заполнены либо d -, либо f -оболочки (см. § 9 гл. 1). Электроны на этих оболочках находятся очень близко к ядру (в глубине атома) и практически не ощущают факта объединения атомов в кристалл. В формировании ферромагнитного момента главную роль играют именно d - и f -электроны магнитных металлов. Можно представлять себе так: в узлах кристаллической решетки сосредоточены (локализованы) электронные магнитные моменты, взаимодействующие друг с другом путем обменного взаимодействия. Но, в отличие от диэлектриков, они погружены в газ свободных электронов, электроны тоже принимают участие в создании магнитного момента. Однако принцип Паули мешает спинам электронов проводимости выстро-

иться всем параллельно друг другу — они только слегка подмагничены d - или f -электронами. Подмагничивание осуществляется за счет обменного взаимодействия.

Такая упрощенная картина «устройства» ферромагнитных металлов носит название $s - d (f)$ — *обменной модели*, так как электроны проводимости происходят из s -электронов атомов металла.

Основное упрощение, принятое в $s - d (f)$ -обменной модели, состоит в пренебрежении ролью электронов проводимости в обменном взаимодействии между d - или f -электронами.

Хотя использование ферромагнитных металлов было начато задолго до того, как была понята природа магнетизма, именно магнетизм металлов особенно труден для полного понимания. Эта область физики магнитных явлений активно развивается в настоящее время.

§ 3. Переход «пара — ферро» — один из фазовых переходов 2-го рода

Изменение внешних условий изменяет свойства тел. Нагревая полупроводник, мы увеличиваем его проводимость, нагревание ферромагнетика уменьшает его намагниченность; сдвигая твердое тело, мы умень-

шаем его объем и т. д. и т. п. Примеры можно множить до бесконечности.

Обычно небольшое изменение внешних условий (температуры, давления) приводит к небольшому изменению свойств. Поэтому зависимость «свойства — внешнее условие» можно изобразить в виде непрерывной кривой. Примеры таких кривых мы уже видели: зависимость намагниченности или магнитной восприимчивости от тем-

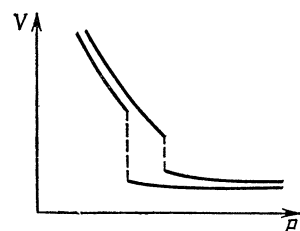


Рис. 37. Зависимость удельного объема V от давления P при переходе из газовой фазы в жидкую (изображены две изотермы).

пературы. Но иногда небольшое изменение внешних условий приводит к «катастрофическим» последствиям: либо одна из характеристик тела изменяется скачкообразно, либо появляется свойство, которого не было. На рис. 37 изображена зависимость удельного объема

газа от давления. Видно, что при некотором давлении удельный объем скачком изменился. Газ превратился в жидкость. Пример появления (исчезновения) свойства описан выше: при температуре Кюри T_c появляется (исчезает) намагниченность тела. При $T > T_c$ намагниченности нет вовсе, нет ее и в самой точке Кюри (конечно, в отсутствие магнитного поля). Скачкообразное изменение объема — пример фазового перехода 1-го рода, а появление (исчезновение) намагниченности — переход «пара — ферро» — пример фазового перехода 2-го рода. Конечно, примеры не есть строгое определение. Не отвлекаясь от сути нашего рассказа, дать строгое определение фазовых переходов 1-го и 2-го рода трудно. Мы не будем этого делать. Обратим внимание только на следующий факт: скачок есть — фазовый переход 1-го рода; скачка нет — фазовый переход 2-го рода.

Сравнивать (есть или нет скачка), надо, естественно, однотипные характеристики. Например, есть вещества, у которых в определенных условиях скачком изменяется намагниченность — происходит магнитный фазовый переход 1-го рода. Мы еще встретимся с такой ситуацией (см. гл. 4). С другой стороны, при переходе «пара — ферро» скачком меняется теплоемкость тела. При переходе же 1-го рода выделяется или поглощается тепло как при плавлении, при кипении (вспомните формулу Клапейрона — Клаузиуса!). К сожалению, нет возможности останавливаться сколько-нибудь подробно на всех этих очень интересных вопросах.

Мы уже знаем, что равновесное значение магнитного момента минимизирует энергию (точнее, свободную энергию F) тела. Этим свойством — минимизировать свободную энергию — обладают многие характеристики физических систем. Чтобы не ограничиваться только магнитными свойствами, параметр, характеризующий некоторое свойство тела, обозначим буквой η . Свободная энергия F — функция этого параметра: $F = F(\eta)$. При фазовом переходе 1-го рода η при некоторой критической температуре $T_{кр}$ имеет скачок, а при фазовом переходе 2-го рода $\eta(T) \equiv 0$ при $T \geq T_{кр}$ и $\eta(T) \neq 0$ при $T < T_{кр}$; $T_{кр}$ — точка фазового перехода 2-го рода, если $\eta(T_{кр}) = 0$. Равновесное значение $\eta = -\eta(T)$ находится из условия минимума

$$\frac{dF}{d\eta} = 0, \quad \frac{d^2F}{d\eta^2} > 0. \quad (3.12)$$

Мы хотим показать, как при изменении температуры деформируется функция $F(\eta)$, что, по существу, и служит причиной фазового перехода. На рис. 38 показан случай фазового перехода 1-го рода, а на рис. 39 — фазового перехода 2-го рода. Видно, что при фазовом переходе 1-го рода на кривой $F = F(\eta)$ зарождается новый минимум, и при $T > T_{кр}$ он оказывается более глубоким, чем первый. Однако для того, чтобы попасть в «новый» минимум из «старого», система должна преодолеть определенный потенциальный барьер — перевалить через «горб» высоты ΔF , отделяющий один минимум от другого. При низких температурах такой процесс, как правило, очень затруднителен (его вероятность пропорциональна $e^{-\Delta F/kT}$) и система может оказаться в переохлажденном или перегретом состоянии. Такие состояния называют метастабильными. Иногда для перехода из метастабильного состояния в стабильное не хватает геологических эпох, и тело устойчиво существует в метастабильном состоянии (хорошим примером необычайно устойчивого метастабильного состояния служит алмаз, самопроизвольное превращение которого в графит никто не наблюдал).

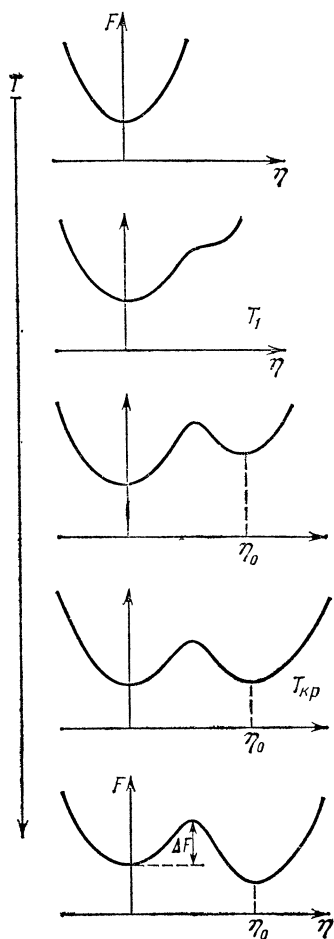


Рис. 38. Трансформация (при изменении температуры T) зависимости свободной энергии F от параметра η при фазовом переходе 1-го рода. При $T = T_1$ зарождается новый минимум (при $\eta \neq 0$). При $T_1 < T < T_{кр}$ состояние с $\eta = \eta_0 \neq 0$ метастабильно, а при $T > T_{кр}$ стабильно.

При фазовом переходе 2-го рода при появлении нового минимума (ниже $T_{кр}$) прежний минимум превращается в максимум (см. рис. 39). Естественно, никакие переохлаждение или перегрев невозможны *).

Вся эта картина, конечно, очень схематична и приближительна, но качественно правильно рисует отличие фазового перехода 2-го рода от фазового перехода 1-го рода. Расхождение между истинной и упрощенной картинами особенно существенно в случае фазового перехода 2-го рода (из сказанного ниже будет ясно, с чем связана сложность задачи при исследовании именно фазовых переходов 2-го рода). Рис. 38, 39, изображающие зависимость $F(\eta)$, как мы уже имели случай заметить, очень напоминают зависимость потенциальной энергии U от координаты x , позволяющую исследовать условия устойчивости тела, движущегося вдоль оси x . Для поддержания аналогии будем именовать параметр η «обобщенной координатой», а состояние системы, описываемое параметром η , «телом». Итак, в точке с «обобщенной координатой», где $F(\eta)$ имеет минимум, «тело» находится в устойчивом или метастабильном состоянии.

Что значит «находится»? Это значит, что «тело» за счет теплового движения совершает малые колебания именно

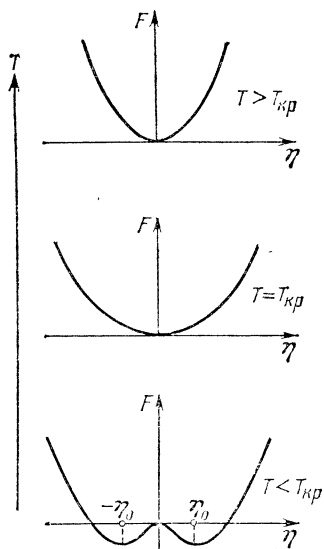


Рис. 39. То же, что и на рис. 38, но для фазового перехода 2-го рода. Устойчивое (при $T > T_{кр}$) состояние с $\eta = 0$ превращается в неустойчивое и возникает (при $T < T_{кр}$) устойчивые состояния с $\eta = \pm \eta_0 \neq 0$.

*) *Задача.* Исходя из выражения $F = \frac{1}{2} a (T - T_{кр}) \eta^2 + \frac{1}{4} b \eta^4$ (a, b — постоянные), вычислите η и покажите, что при $b > 0$ эта функция описывает фазовый переход 2-го рода (Л. Д. Ландау, 1937 г.). Свяжите параметры $a, T_{кр}$ и b с величинами, характеризующими переход «пара — ферро».

вокруг этой точки. (Чтобы было совсем ясно, представьте себе неподвижно висящий маятник, колеблющийся под ударами молекул окружающего его воздуха. Даже если заключить маятник в футляр и выкачать воздух из футляра, маятник будет колебаться, так как хаотическое тепловое движение составляющих его атомов будет изменять положение его центра тяжести.) Амплитуда колебаний «тела» зависит от крутизны кривой $F(\eta)$ в точке равновесия *). А теперь всмотритесь в рис. 39. Кривая $F = F(\eta)$ на этом рисунке (при $T = T_{кр}$) очень уплощенная, ведь при бесконечно малом изменении температуры она должна превратиться в кривую с максимумом и двумя минимумами **). Ясно, что при $T = T_{кр}$ амплитуда колебаний велика.

Учесть их оказалось очень сложной задачей. Только в самые последние годы физики получили уверенность, что они умеют с большой степенью точности описывать свойства физических систем в непосредственной близости от точки фазового перехода 2-го рода. Для этого, как ни странно, понадобилось рассматривать свойства физических систем, существующих (на бумаге, конечно) в пространствах с дробной размерностью (наш мир трехмерен, плоскость — двумерное пространство, линия — одномерное ...).

Если изменение параметра η описывает фазовый переход 2-го рода, то часто его называют параметром порядка. В случае перехода «пара — ферро» причина этого названия очевидна: магнитный момент \mathcal{M}_s есть мера упорядочения атомных спинов.

Приведем еще один пример фазового перехода 2-го рода: упорядочение сплава CuZn. На рис. 40 показана кристаллическая решетка этого сплава. При высоких температурах атомы Cu и Zn распределены беспорядочно — с равной вероятностью (равной, естественно, $1/2$) они занимают любые узлы кристаллической решетки. Начиная с некоторой температуры (ее тоже называют температурой Кюри), вероятности начинают отличаться от $1/2$, вначале чуть-чуть, а при стремлении температуры к нулю вероятности стремятся к нулю и к единице соответственно — наступает полный порядок.

*) Уровень поднятия «тела» над точкой равновесия определяется температурой T .

**) Проследите это, используя задачу со стр. 115.

И еще одно, последнее в этом параграфе, замечание. Как правило, при фазовом переходе 2-го рода изменяется симметрия тела *). (На этот факт впервые обратил внимание Л. Д. Ландау и, основываясь на нем, построил феноменологическую теорию таких переходов.) Действительно, при возникновении ферромагнетизма выделяется

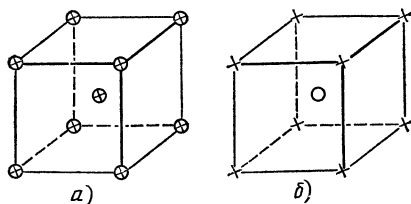


Рис. 40. Расположение атомов Zn (крестики) и Cu (кружочки) в упорядочиваемся сплаве: а) при $T > T_{кр}$, б) при $T = 0$.

избранное направление в системе атомных магнитных моментов, а при упорядочении сплава меняется период кристаллической решетки. И вот что интересно, в непосредственной близости к $T_{кр}$ параметр порядка еще бесконечно мал, а симметрия уже изменилась, — она изменяется скачком, ведь у тела либо одна симметрия, либо другая. Непрерывный переход от одной симметрии к другой невозможен.

§ 4. Куда направлен магнитный момент ферромагнетика? Энергия магнитной анизотропии

Изотропия обменного взаимодействия, о которой мы говорили в § 10 гл. 1, приводит к тому, что направление магнитного момента ферромагнетика остается неопределенным. Конечно, если поместить ферромагнетик в магнитное поле H , то магнитному моменту энергетически выгодно установиться вдоль H . Но нет ли внутренних, присущих самому телу причин, заставляющих плотность магнитного момента M_s ориентироваться в кристалле определенным образом? Конечно, есть.

Во-первых, это — диполь-дипольные силы, действующие между атомными магнитными моментами. Так как

*) О симметрии рекомендуем прочесть книгу А. С. Компанеева «Симметрия в микро- и макромире» («Наука», 1978).

энергия диполь-дипольного взаимодействия (1.35) зависит от ориентации магнитных моментов относительно прямой, их соединяющей, то в ферромагнитном кристалле, где эти прямые фиксированы кристаллической решеткой, энергия диполь-дипольного взаимодействия будет зависеть от ориентации вектора \mathcal{M}_s .

Во-вторых, спиновые магнитные моменты атомов, создающие суммарный магнитный момент ферромагнетика, взаимодействуют с электронными токами. Последние обусловлены орбитальным движением и определенным образом ориентированы в пространстве. В результате одни направления спинов оказываются энергетически более выгодными, чем другие.

С каждым из двух описанных здесь взаимодействий можно связать энергию, зависящую от направления в пространстве плотности магнитного момента \mathcal{M}_s . Ее называют *энергией анизотропии*.

Энергия анизотропии определяется магнитным диполь-дипольным и спин-орбитальным взаимодействиями.

Часто энергию анизотропии делят на внутриионную и межионную. Существование внутриионной энергии обусловлено тем, что под влиянием электрического поля, создаваемого окружающими ионами, распределение электронов внутри иона не изотропно. И вообще, существование энергии анизотропии, по сути дела, — следствие неизотропного распределения электронов в кристаллической решетке.

Почему мы, рассматривая появление спонтанного магнитного момента у ферромагнетика, не учитывали энергии анизотропии? Потому, что она значительно меньше обменной. Подчеркивая это обстоятельство, говорят, что обменная энергия *электростатического* происхождения, а энергия анизотропии — *релятивистского*. Если бы скорость света c равнялась бесконечности, то энергия анизотропии равнялась бы нулю. Это легко увидеть на примере магнитной диполь-дипольной энергии. Мы ее уже оценивали (см. стр. 52) и видели, что она в c^2/v^2 раз меньше электростатической, а обменная, если и отличается от электростатической, то немого. Так как энергия анизотропии значительно меньше, чем обменная энергия, то она практически не влияет на формирование

намагниченности \mathcal{M}_s , а ответственна только за ориентацию вектора \mathcal{M}_s .

У нас нет возможности вывести выражение для энергии анизотропии \mathcal{E}_a . Это — трудная, до сих пор нерешенная полностью задача. Мы воспользуемся феноменологическим описанием *), основанным на аналогии между энергией анизотропии и энергией магнитного момента во внешнем однородном магнитном поле. Ведь магнитное поле именно ориентирует магнитный момент. Итак, пусть в кристалле есть некоторое направление, определяемое единичным вектором \mathbf{n} , вдоль которого магнитному моменту выгодно быть направленным. Это направление называют избранной осью, или *осью анизотропии*.

Тогда, следуя аналогии, хотелось бы написать

$$\mathcal{E}_a = -\beta \mathcal{M} n V, \quad \beta > 0.$$

Индекс s у \mathcal{M} мы опускаем.

Хотелось бы, но ... нельзя. И вот по какой причине. Намагниченность \mathcal{M} — векторная сумма атомных магнитных диполей. А магнитные диполи изменяют свое направление на обратное при инверсии времени, т. е. при замене $t \rightarrow -t$ (мы об этом говорили на стр. 19). Значит, изменяет направление на обратное и \mathcal{M} . Энергия при инверсии времени не может изменить свой знак (в таких случаях говорят: энергия инвариантна относительно инверсии времени **))... Следовательно, выписанное выражение не может быть правильным. В выражении для энергии вектор \mathcal{M} должен входить в четной степени. Только в этом случае замена t на $-t$ оставит энергию инвариантной. Простейшее выражение, удовлетворяющее этому условию, таково:

$$\mathcal{E}_a = -\frac{1}{2} \beta (\mathcal{M} n)^2 V, \quad \beta > 0. \quad (3.13)$$

Этим выражением мы и будем пользоваться. Задача микроскопической теории заключается в вычислении множителя β — *константы анизотропии*. Отметим (это потом пригодится), что константа анизотропии безразмерна. В разных ферромагнетиках β имеет разное значение, но

*) Определение понятия «феноменологическая теория» см. на стр. 107.

**) Это особенно наглядно видно по выражению энергии свободной частицы $\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2}$. Скорость v меняет знак при $t \rightarrow -t$, а v^2 — нет.

практически всегда константа анизотропии β значительно меньше обменного параметра α (см. формулы (3.10), (3.11)). Причину мы уже называли:

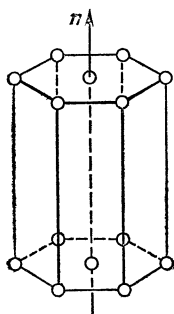


Рис. 41. Ячейка гексагонального кристалла.

малость релятивистского взаимодействия по сравнению с электростатическим. Выражение (3.13) справедливо отнюдь не для любых кристаллов. Для одноосных кристаллов формула (3.13) справедлива (например, для кристаллов с гексагональной ячейкой; рис. 41), а в кубических ферромагнетиках надо использовать более сложную зависимость \mathcal{E}_a от направления вектора \mathcal{M} .

Из формулы (3.13) видно, что есть два наиболее выгодных направления для вектора \mathcal{M} : параллельно и антипараллельно n . Эта неопределенность не может быть устранена внутренними силами ферромагнетика и приводит к важным последствиям (см. § 5). А пока поместим ферромагнетик во внешнее магнитное поле H и попытаемся определить, куда будет направлен вектор \mathcal{M} в этом случае.

Как всегда, надо исходить из условия минимума энергии \mathcal{E}_a . В данном случае

$$\mathcal{E}_a = \left[-\frac{1}{2} \beta (\mathcal{M}n)^2 - \mathcal{M}H \right] V. \quad (3.14)$$

Векторы n и H определяют некоторую плоскость σ (рис. 42). Вектору \mathcal{M} невыгодно выходить из этой плоскости, так как это приведет к увеличению энергии. Поэтому нужно найти только один угол — угол ϑ между \mathcal{M} и n . Выпишем зависимость \mathcal{E}_a от ϑ , раскрывая формулу (3.14):

$$\mathcal{E}_a = -V \left(\frac{1}{2} \beta \mathcal{M}^2 \cos^2 \vartheta + H_x \mathcal{M} \sin \vartheta + H_z \mathcal{M} \cos \vartheta \right). \quad (3.14')$$

Ось z мы совместили с вектором n , а ось x лежит в плоскости σ и перпендикулярна к n .

Условие минимума \mathcal{E}_a записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_a}{\partial \vartheta} &\equiv V \mathcal{M} \left(\frac{1}{2} \beta \mathcal{M} \sin 2\vartheta - H_x \cos \vartheta + H_z \sin \vartheta \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}_a}{\partial \vartheta^2} &\equiv V \mathcal{M} (\beta \mathcal{M} \cos 2\vartheta + H_x \sin \vartheta + H_z \cos \vartheta) > 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Условие положительности второй производной отбирает из решений уравнения (3.15) именно те, которые соответствуют минимуму, а не максимуму. После замены $\sin \vartheta = \xi$ уравнение (3.15) становится алгебраическим уравнением четвертой степени относительно ξ :

$$(\beta \mathcal{M} \xi - H_x)^2 (1 - \xi^2) = H_z \xi^2. \quad (3.16)$$

Из курса алгебры известно, что уравнение с вещественными коэффициентами может иметь как вещественные, так и комплексные попарно сопряженные корни *). Общее число корней равно степени уравнения — в данном случае их четыре. Из сказанного ясно, что уравнение (3.16) имеет либо два действительных корня, либо четыре. Естественно, нас интересуют только действительные корни! Так как правая часть уравнения положительна, то вещественные корни по абсолютной величине не превосходят единицу. Значит, каждый из них определяет некоторое значение угла ϑ .

Характер экстремальной точки (максимум или минимум) зависит от знака второй производной. Однако прямой путь проверки весьма труден. Ведь для этого нужно подставить соответствующий корень в выражение для второй производной, а найти корень уравнения (3.16) в явно обозримом виде практически невозможно (поглядите на него внимательно: полное — не биквадратное уравнение четвертой степени!) Мы используем качественные соображения. Они позволяют представить, как обстоит дело.

Когда уравнение (3.16) имеет четыре вещественных корня, два из них соответствуют минимуму функции $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_a(\vartheta)$ (см. 3.14')), а два — максимуму. Ясно, что

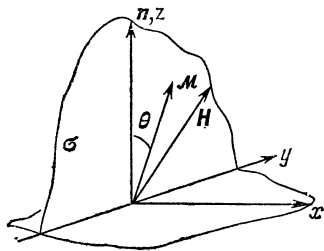


Рис. 42. При $H \neq 0$ магнитный момент лежит в плоскости σ , «натянутой» на векторы n и H . Параллельно или антипараллельно вектору n располагается магнитный момент при $H = 0$.

*) Это значит: если $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ — корень уравнения, то и $\bar{\xi} = \xi_1 - i\xi_2$ — тоже обязательно корень того же уравнения (ξ_1 и ξ_2 — действительные числа).

минимумы и максимумы чередуются. Наиболее глубокий минимум соответствует стабильному состоянию, а менее глубокий — метастабильному *). Когда уравнение (3.16) имеет два действительных корня, функция $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_a(\vartheta)$

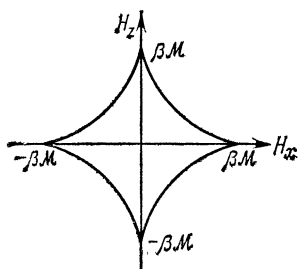


Рис. 43. Область метастабильных состояний ферромагнетика. Если конец вектора \mathbf{H} находится внутри астроида, то у ферромагнетика, кроме стабильного, есть метастабильное состояние,

имеет один минимум и один максимум. Переход от одного случая к другому происходит за счет изменения величины и направления магнитного поля \mathbf{H} (т. е. значений проекций H_x и H_z) и осуществляется путем слияния одного максимума с соседним минимумом. Ясно, что при этом у ферромагнетика исчезает возможность находиться в метастабильном состоянии.

Определим область тех значений проекций магнитного поля H_x и H_z , в которой у ферромагнетика есть мета-

стабильное состояние. Как мы убедимся сейчас, она ограничена некоторой кривой на плоскости H_x, H_z , уравнение которой легко получить из следующих соображений: так как в точках на этой кривой сливаются минимум и максимум функции $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_a(\vartheta)$, то вторая производная $\frac{d^2 \mathcal{E}_a}{d\vartheta^2}$ на этой кривой должна быть равна нулю. Другими словами, в (3.15) неравенство надо заменить равенством.

Итак, мы имеем два уравнения, которые удобно записать в следующей форме:

$$\frac{H_x}{\sin \vartheta} - \frac{H_z}{\cos \vartheta} = \beta_0 \mathcal{M},$$

$$\frac{H_x}{\sin^3 \vartheta} + \frac{H_z}{\cos^3 \vartheta} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{H_x^{1/3}}{\sin \vartheta} + \frac{H_z^{1/3}}{\cos \vartheta} = 0.$$

Исключив ϑ из этих уравнений**), получим уравнение искомой кривой

$$H_x^{2/3} + H_z^{2/3} = (\beta_0 \mathcal{M})^{2/3}. \quad (3.17)$$

*) Похожие рассуждения мы уже приводили в § 3 этой главы.

**) Для этого надо найти $\sin \vartheta$ и $\cos \vartheta$ из выписанных уравнений и подставить в тождество $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$.

Эта кривая называется астроидой, так как своей формой напоминает звезду (astron — по-гречески звезда). Астроида (рис. 43) делит плоскость H_x, H_z на две части. В какой же из них есть метастабильные состояния, а в какой их нет? На этот вопрос легко ответить, рассматривая очень большие магнитные поля (формально при $H \rightarrow \infty$), когда энергией анизотропии попросту можно пренебречь. В этом случае $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_a(\vartheta)$ имеет один минимум, когда вектор \mathbf{M} параллелен вектору \mathbf{H} , т. е. при $\operatorname{tg} \vartheta = H_x/H_z$ — никакие метастабильные состояния невозможны. Следовательно,

если H_x и H_z «находятся» вне астроида — метастабильных состояний нет, если внутри — метастабильные состояния есть.

Из соображений симметрии ясно, что при $\mathbf{H} = 0$, а также при $H_z = 0$, $H_x < \beta\mathcal{M}$ кривая $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_a(\vartheta)$ имеет два минимума одинаковой глубины *). Ферромагнетик выбирает одно из двух состояний, «руководствуясь» соображениями, о которых мы расскажем в следующем параграфе.

§ 5. Домены

Повторим вывод, к которому мы пришли: при «симметрично» приложенном слабом магнитном поле (т. е. при поле, перпендикулярном к оси анизотропии и меньшем $\beta\mathcal{M}$) стабильное и метастабильное состояния становятся неразличимыми, а соответствующие им направления вектора намагниченности — одинаково выгодными. В частности, если $\mathbf{H} = 0$, магнитному моменту одинаково выгодно быть направленным в любую сторону по оси анизотропии, только бы не отклоняться от нее. Какое же из этих двух направлений будет выбрано в действительности? Ясно, что выбор связан с чем-то, нами еще неучтенным.

Пусть вдоль оси анизотропии было приложено магнитное поле — даже сколь угодно слабое. Направление по полю, конечно, более выгодно, чем противоположное — магнитный момент выберет его. А теперь постепенно (бесконечно медленно **) уберем поле. Состояния с проти-

*) *Задача.* Проверьте это утверждение.

**) Бесконечно медленно, чтобы не «встряхнуть» магнитик — при этом он может размагнититься (см. ниже).

воположно направленными магнитными моментами, хотя и имеют одинаковую энергию, но отделены энергетическим барьером, величина которого определяется энергией анизотропии. После исчезновения поля намагниченность может и не преодолеть этот барьер. Тогда магнитный момент тела сохранит направление, заданное магнитным полем. Так возникает состояние, в котором ферромагнетик обладает спонтанной намагниченностью, — конечно, при температуре ниже температуры Кюри.

И все же это законсервировавшееся намагниченное состояние, несмотря на его несомненную энергетическую выгодность, метастабильно, а не стабильно. Есть состояние с более низкой энергией. Действительно, всякий образец ограничен. Будучи намагниченным, он служит источником магнитного поля в окружающем пространстве. Но магнитное поле обладает положительной энергией, плотность которой (т. е. энергия, приходящаяся на единицу объема) равна

$$\mathcal{E}_H = \frac{H^2}{8\pi}. \quad (3.18)$$

Это выражение мы не взяли «с потолка». Оно следует из уравнений Максвелла. При расчете энергии ферромагнетика энергию магнитного поля мы вовсе не учитывали, а ведь полная энергия магнитного поля может быть очень большой. Например, в случае бесконечной намагниченной пластины (рис. 44, а) она бесконечна, так как магнитное поле простирается до бесконечности, причем напряженность его не уменьшается с расстоянием *), а равна $4\pi M$ (см. стр. 69). Приходится сделать вывод, что то намагниченное состояние, которое мы рассмотрели (и считали энергетически наиболее выгодным), в действительности обладает очень большой энергией. Как же помочь делу, как уменьшить полную энергию? На первый взгляд следует отказаться от ориентации магнитного момента вдоль оси анизотропии, а расположить момент перпендикулярно к оси. При этом мы «проиграем» в энергии анизотропии, но, казалось бы, понизим энергию магнитного поля. Это — плохой путь.

*) Здесь слово «бесконечная» по отношению к пластине надо понимать условно: два ее размера значительно больше третьего. В действительности, когда пластина конечна, магнитное поле убывает — на расстоянии, большом по сравнению с размером пластины.

Каждая пластина ограничена со всех сторон. Из нее всегда «вытекают» магнитные силовые линии и заполняют пространство вокруг пластины. Энергия магнитного поля по-прежнему будет очень большой и «приигрыш» в энергии анизотропии не компенсируется. Анализ показывает, что отказываться (во всяком случае

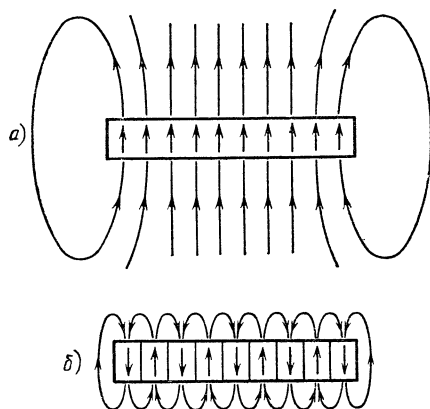


Рис. 44. Магнитное поле вокруг ферромагнитной пластины: а) пластина намагничена однородно; б) пластина разбита на домены.

полностью) от преимуществ, обеспечиваемых минимальностью энергии анизотропии, нельзя. Но можно воспользоваться тем, что имеется эквивалентность обоих направлений намагниченности вдоль оси анизотропии. Разобьем пластину на одинаковые чередующиеся области. В пределах каждой области вектор намагниченности пусть имеет одно и то же направление вдоль оси, но в соседних областях — противоположные направления, так что в целом тело размагничено. Эти области называются областями спонтанного намагничения, или *доменами* (рис. 44, б). Из рисунка видно, что силовые линии, выходя из одного домена, входят в соседний. Таким образом, «рассеяние» силовых линий весьма незначительно, т. е. магнитное поле достаточно быстро убывает при удалении от поверхности (оно существенно на расстоянии порядка размеров домена).

Энергия магнитного поля \mathcal{E}_H вокруг пластины, разбитой на домены, конечно, значительно меньше энергии

намагниченной пластины. По порядку величины

$$\mathcal{E}_H^d \approx \mathcal{M}^2 S d, \quad (3.19)$$

где d — толщина домена, а S — площадь пластины, равная L^2 . Это, конечно, не точное выражение — численные множители мы опустили, хотя они могут оказаться отнюдь не близкими к единице (так, в формуле (3.18) численный множитель равен $(8\pi)^{-1} \approx 1/25$). Все формулы этого параграфа поэтому носят качественный характер.

Величина энергии магнитной анизотропии размагниченной пластины такая же, как у намагниченной. Похоже, что ферромагнетику действительно выгодно разбиваться на домены. Немедленно возникает вопрос: на сколько доменов должна разбиться ферромагнитная пластина? С точки зрения энергии магнитного поля, чем больше число доменов, тем лучше, так как с ростом числа доменов их размер уменьшается, и магнитные силовые линии все более плотно «прижимаются» к пластине — поле быстрее убывает при удалении от пластины, а энергия магнитного поля уменьшается (см. (3.19)). Что же мешает «измельчению» доменов? Казалось бы, энергия магнитной анизотропии при любом разбиении одна и та же. С другой стороны, эксперимент с несомненностью показывает, что домены имеют вполне определенные макроскопические размеры, зависящие от формы и размеров образца.

Для того чтобы свести концы с концами, надо внимательнее отнестись к границе между двумя доменами. Мы, не задумываясь, располагали магнитные моменты в соседних доменах навстречу друг другу, забыв, что это «преступление» с точки зрения обменного взаимодействия (3.8'), согласно которому обменная энергия минимальна, когда соседние спины параллельны, и максимальна (!), когда они антипараллельны. А ведь обменное взаимодействие — самое главное из взаимодействий...

Итак, ясно: соседство антипараллельных спинов заведомо невыгодно. Анализ показывает, что переход от одного направления магнитного момента к противоположному происходит постепенно *): на расстоянии

*) Анализ основан на вычислении такого распределения намагниченности, которое обладает наименьшей энергией, однако при условии, что вдали от границы магнитные моменты направлены в противоположные стороны,

порядка

$$\delta = a (A/\mu\beta\mathcal{H})^{1/2}, \quad (3.20)$$

где a — межатомное расстояние, вектор намагниченности поворачивается на 180° в плоскости, параллельной границе между доменами (рис. 45). Вместо резкой (геометрической) границы между доменами при этом образуется переходной слой конечной толщины — нечто вроде стенки. Так и говорят: *доменная стенка*. Ее структура такова, что позволяет с наименьшим проигрышем энергии перейти от одного домена к другому (чем больше обменная энергия, тем доменная стенка толще, чем больше энергия анизотропии, тем — стенка тоньше). Знание распределения магнитного момента дает возможность вычислить энергию, связанную с появлением одной доменной стенки. Она приблизительно равна *) $\Delta = \mathcal{M}^2\delta$ на см^2 стенки. Вычислив эту энергию, можно забыть о структуре доменной стенки, опять считать ее резкой границей, наличие которой, однако, связано с дополнительной энергией Δ . Мы ниже обсудим, когда такой подход правилен.

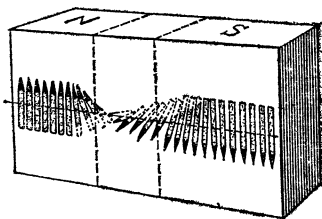


Рис. 45. Доменная стенка. Магнитный момент \mathcal{M} поворачивается, оставаясь параллельным плоскости, разделяющей домены. Вдали от доменной стенки магнитные моменты расположены вдоль оси анизотропии — антипараллельно друг другу.

Теперь видно, что мешает дроблению ферромагнетика на слишком мелкие домены: появление новых доменов увеличивает поверхностную энергию доменных границ и ограничивает дробление. Для того чтобы вычислить величину отдельного домена d , запишем энергию размагниченной ферромагнитной пластины. Так как число доменных стенок равно L/d , площадь границы между доменами есть lL , l — толщина пластины (см. рис. 44, б), то энергия (конечно, отсчитываемая от обменной) равна

$$\mathcal{E} = S \left(d + \delta \frac{l}{d} \right) \mathcal{H}^2. \quad (3.21)$$

*) И здесь, конечно, опущен численный множитель.

Как **всегда**, размер домена находится из условия минимума — в данном случае выражения (3.21). Энергия \mathcal{E} минимальна, если $d = \sqrt{\delta l}$.

Этот важный результат получили Я. И. Френкель, Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Представление о доменах существенно для понимания природы ферромагнетизма: в согласии с экспериментальными фактами

в основном состоянии ферромагнетик ограниченных размеров размагничен, так как разбит на домены.

Размер домена зависит от характеристик ферромагнетика (они входят в параметр δ); он растет с ростом размера образца пропорционально квадратному корню из наименьшего размера пластины.

Внимательному читателю весь наш ход рассуждений должен показаться совершенно нелогичным. Когда мы устанавливали, куда может быть направлен магнитный момент (начало параграфа), то считали, что ферромагнетик однороден — намагниченность не зависит от координат; потом оказалось, что вокруг границы между доменами магнитный момент неоднороден; через несколько строк мы опять об этом «забыли», и это отразилось при написании формулы (3.20). И еще: когда мы выводили уравнение Кюри—Вейсса (§ 2 этой главы), то заведомо не учитывали возможной неоднородности намагниченности. Какое право мы имеем то учитывать неоднородность, то нет? Не проявляем ли мы самоуправство, казалось бы, совершенно недопустимое в науке? — Конечно, нет! Начнем с обоснования возможности замены доменной стенки геометрической границей. Вероятно, все согласятся, что это можно делать, если толщина доменной стенки δ значительно меньше размеров домена d , т. е. при $d \gg \delta$, откуда видно, что все рассмотрение справедливо для достаточно толстых пластин ($l \gg \delta$).

Действительно, для ферромагнетиков достаточно малых размеров (все размеры образца $\sim \delta$) образование доменов вовсе невыгодно. Такие ферромагнитные частицы существуют, не размагничиваются, представляя собой один домен.

А теперь выясним, что дает нам право опираться на результаты, полученные при решении уравнения Кюри—Вейсса. Самые неоднородные области в размагниченном ферромагнетике — доменные стенки. Степень неоднородности характеризуется толщиной доменной стенки δ .

Но ведь $\delta \gg a$, т. е. с точки зрения атомных масштабов даже вблизи границы доменов ферромагнетик однороден *). Итак, использованный подход оправдан. Он имеет право на существование, если выполнены сильные неравенства

$$l \gg \delta \gg a. \quad (3.22)$$

Подчеркнем, что второе неравенство выполняется потому, что обменная энергия гораздо больше энергии анизотропии — факт, нами уже обсуждавшийся.

Образование доменной периодической структуры может служить примером весьма общего явления — *спонтанного* (самопроизвольного) *нарушения симметрии*: однородному высокосимметричному ферромагнетику энергетически выгодно понизить свою симметрию, превратившись в периодическую структуру.

Спонтанное нарушение симметрии мы уже наблюдали: при переходе из парамагнитного состояния в ферромаг-

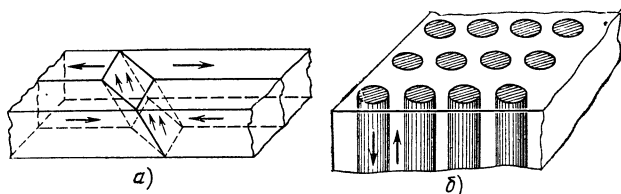


Рис. 46. «Сложные» доменные структуры: а) доменная структура в пленке железа; б) цилиндрические домены. Стрелки обозначают направление намагниченности вдали от доменной стенки.

нитное теряется (нарушается) присущая каждой точке парамагнетика изотропия — за счет образования макроскопического магнитного момента (ведь он куда-то направлен).

Рассмотренный здесь пример доменной структуры — в пластине, вырезанной перпендикулярно к оси анизотропии, — конечно, специальный случай. Бывает, что доменные стенки иначе устроены. Бывает (и как правило!), что форма доменов не столь проста, как мы описали (на рис. 46, а, например, изображена доменная струк-

*) Напомним, что обменное взаимодействие очень быстро спадает с расстоянием; оно, по существу, связывает только соседние атомы, а все атомы ферромагнетика — «эстафетным» образом (см. формулу (3.8')),

тура в пленке железа — как видно, отнюдь не такая простая). В некоторых ферромагнетиках возникают цилиндрические домены (рис. 46, б), нашедшие себе применение в технике — в виде элементов памяти электронных вычислительных машин.

Но как бы ни были устроены доменные структуры, основной вывод остается в силе: суммарному магнитному моменту ограниченного, но достаточно большого ферромагнетика энергетически выгодно быть равным нулю.

Почему же в таком случае существуют постоянные магниты? Чтобы ответить на этот вопрос, следует разобраться, как происходит процесс намагничивания и размагничивания ферромагнетика.

§ 6. Техническая кривая намагничивания

Кривой намагничивания называется зависимость магнитного момента тела от приложенного (внешнего) магнитного поля. Эпитет «техническая» мы объясним позже.

Зависимость магнитного момента парамагнетика (или ферромагнетика — при температуре выше температуры

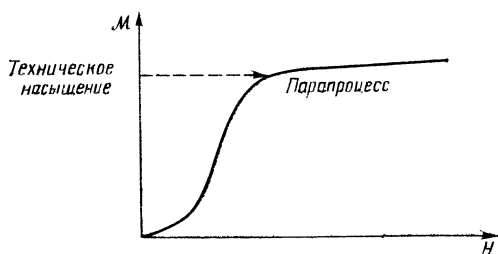


Рис. 47. Основная кривая намагничивания.

Кюри) от магнитного поля линейна вплоть до очень больших полей. Насыщение, т. е. приближение к максимально возможной намагниченности, наступает либо при очень низкой температуре, либо при очень большом магнитном поле в согласии с условием $\mu H \gg kT$ (гл. 2, § 2).

Совсем иначе выглядит кривая намагничивания ферромагнетика. Она изображена на рис. 47. Как видно из рисунка, при $H = 0$ намагниченность M тоже равна

нулю. Это соответствует тому, что говорилось в предыдущем параграфе: в отсутствие приложенного поля ферромагнетик размагничен. Кривая намагничивания, выходящая из начала координат, называется *основной кривой*. С увеличением поля намагниченность растет сначала медленно, а потом начинается резкий рост: в сравнительно узком интервале полей намагниченность увеличивается в десятки раз. Затем рост намагниченности снова замедляется и наступает так называемое *техническое насыщение*. Намагничивание до технического насыщения называется *техническим намагничиванием*, а соответствующий участок кривой — *технической кривой намагничивания* *).

Если по достижении технического насыщения мы продолжаем увеличивать магнитное поле, намагниченность будет слабо изменяться, возрастая почти линейно с полем. Это (последнее) изменение намагниченности с полем называют *парапроцессом*, подчеркивая аналогию с линейной зависимостью от поля намагниченности парамагнетика.

Отличие технической кривой намагничивания ферромагнетика от соответствующей кривой для парамагнетика связано, естественно, с тем, что в ферромагнетике даже при $H = 0$ есть готовые намагниченные макроскопические области (домены), а роль внешнего магнитного поля сводится к выстраиванию их магнитных моментов **). В парамагнетике, как мы говорили, магнитное поле выстраивает атомные *микроскопические* магнитные моменты.

Для качественного объяснения технического намагничивания снова рассмотрим пластину одноосного ферромагнетика (см. рис. 44). Однако теперь пусть внешнее магнитное поле приложено к ней под некоторым углом к оси анизотропии. Поле нарушает равноправие обоих направлений вдоль оси, делая более выгодным то направление, которое образует с полем острый угол. Иными словами, доменам с магнитным моментом, направленным

*) Надо иметь в виду, что численные характеристики основной кривой меняются не только от ферромагнетика к ферромагнетике, но и (несколько) от образца к образцу. Характер кривой при этом, как правило, сохраняется.

**) Выстраивание магнитных моментов доменов, конечно, означает разрушение (ликвидацию) доменной структуры, так как домены отделяются только направлением магнитных моментов.

по полю, выгодно вырасти, а с моментами против поля — уменьшиться. Как же происходит рост одних доменов и уменьшение других?

Из-за того, что в доменных стенках направление намагниченности изменяется непрерывно от точки к точке (см. рис. 45), даже при сколь угодно малом поле магнит-

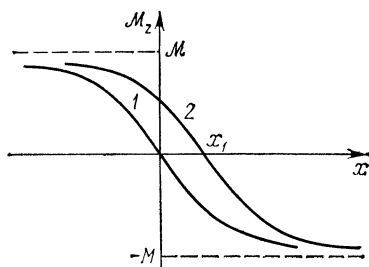


Рис. 48. Изменение положения доменной границы под воздействием магнитного поля: кривая 1 — зависимость проекции магнитного момента на ось анизотропии от координаты, $x = 0$ — граница доменов ($H = 0$), кривая 2 — то же при $H \neq 0$; граница доменов сдвинулась на величину x_1 ,

ный момент в стенке повернется — в малом поле на малый угол. Это приведет к изменению распределения намагниченности и, тем самым, к перемещению доменной границы (рис. 48), а в результате — к появлению намагниченности тела.

Дальнейший рост магнитного поля приводит к дальнейшему перемещению границ доменов и к непрерывному возрастанию намагниченности. Подчеркнем, что линейный участок на основной кривой (при

$H \rightarrow 0$) — следствие существования доменных стенок конечной толщины. Если бы граница между доменами была бесконечно тонкой, для создания конечной намагниченности нужно было бы изменить направление магнитных моментов сразу во всех «невыгодных» доменах, что потребовало бы значительного поля.

При некотором значении магнитного поля «невыгодные» домены почти исчезают, и рост намагниченности замедляется. Таким образом, область полей, в которой происходит наиболее быстрое изменение намагниченности, соответствует движению доменных границ. Дальнейшее увеличение намагниченности связано с поворотом полного магнитного момента в направлении магнитного поля. Такой поворот затруднен (по сравнению с поворотами магнитных моментов в доменных стенках), и, как результат, зависимость $\mathcal{M} = \mathcal{M}(H)$ в этой области полей более полого. Наконец, все магнитные моменты доменов выстроились по полю — ферромагнетик макро-

скопически однороден и его спонтанный магнитный момент занял энергетически наиболее выгодное положение: наступило техническое насыщение. Дальнейший рост намагниченности с полем (парапроцесс) — результат борьбы магнитного поля с тепловым движением отдельных атомных спинов, в которой магнитное поле — союзник обменного взаимодействия, а их общий противник — потребность к беспорядку, имеющаяся при любой конечной температуре.

Рассмотрим теперь процесс, обратный намагничиванию, — размагничивание. Пусть магнитное поле, намагнитившее ферромагнетик до технического насыщения, уменьшается. Вместе с полем, конечно, будет уменьшаться и намагниченность. Должно ли при этом уменьшение намагниченности (размагничивание) изображаться той же кривой, которая изображает намагничивание (см. рис. 47)? Не обязательно. В идеальном ферромагнетике (без примесей, искажений решетки, дислокаций и т. п., а мы только такими объектами и занимаемся) все зависит от того, внутрь или вне астроида на рис. 43 попадает точка, изображающая магнитное поле. Если эта точка находится вне астроида (там, где нет метастабильных состояний), то точка на плоскости H, M будет двигаться (по крайней мере вначале) вдоль основной кривой намагничивания. Если же точка, изображающая магнитное поле насыщения, попадает внутрь астроида (там, где есть метастабильные состояния), то при уменьшении поля изменение намагниченности будет происходить по кривой метастабильных состояний. Каждая точка на этой кривой отвечает намагниченности, большей, чем намагниченность на основной кривой. Когда магнитное поле обратится в нуль, намагниченность в нуль не обратится, так как для размагничивания, т. е. разбиения тела на домены, требуется преодолеть энергетический барьер (см. §§ 4, 5 этой главы). Как мы уже пояснили, намагниченное состояние ферромагнетика в отсутствие внешнего поля метастабильно, но часто может сохраняться неограниченно долго. Этот факт известен с детства каждому, кто играл с постоянным магнитом.

Намагниченность ферромагнетика в отсутствие внешнего поля называется *остаточной намагниченностью*. Для того чтобы «убрать» остаточную намагниченность — насильно размагнитить образец, необходимо приложить

достаточно большое магнитное поле, направленное противоположно полю намагничивания. Величина напряженности этого поля называется *коэрцитивной силой*. В разных ферромагнетиках коэрцитивная сила разная: от десятых долей эрстеда до тысяч эрстед. Материалы с большой коэрцитивной силой называют *магнитожесткими*, а с малой — *магнитомягкими*. В разных областях

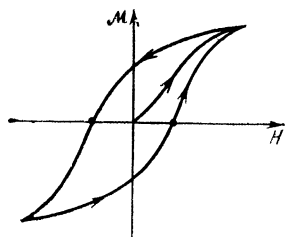


Рис. 49. Петля гистерезиса.

техники находят себе применение и те, и другие.

Продолжая увеличивать поле в противоположном первоначально намагничивающему полю направлению, можно снова намагнитить ферромагнетик до технического насыщения. Уменьшение противоположно направленного поля при наличии метастабильных состояний приведет к

изменению намагниченности вдоль кривой, расположенной ниже основной. Опять появится остаточная намагниченность, для ликвидации которой снова требуется приложить поле, равное коэрцитивной силе, но теперь направленное вдоль первоначального направления... Тут вполне уместно сказать и т. д., потому что дальнейшее увеличение поля приведет к намагничиванию вплоть до технического насыщения.

Описанные процессы намагничивания и перемагничивания изображены на рис. 49. Наиболее характерная особенность этой кривой — необратимое изменение намагниченности с полем: намагничивание и размагничивание ферромагнетика происходит по разным кривым. Такая необратимость носит название *магнитного гистерезиса*, а замкнутая кривая на рисунке — *петли гистерезиса*. Подчеркнем:

гистерезис — одно из проявлений существования метастабильных состояний.

Эпитет «технический» (техническое насыщение, техническая кривая намагничивания) отмечает не только факт технической важности кривой намагничивания реальных магнетиков, но и зависимость процесса намагничивания от техники изготовления образца. Дело в том, что численные характеристики технической кривой на-

магничивания, петли гистерезиса, коэрцитивной силы существенно зависят от состояния образца, от его обработки при приготовлении. Этим пользуются в технике для создания магнитов с нужными свойствами. Физическая причина чувствительности технической кривой намагничивания к состоянию образца — в зависимости константы анизотропии β от структуры кристаллической решетки. Увеличение β в дефектных областях приводит к тому, что магнитный момент за них «цепляется», и требуется сравнительно большое поле, чтобы «заставить» его переориентироваться. Исследование технической кривой намагничивания и выработка рекомендаций для получения нужных магнитных свойств — важная глава прикладной физики магнитных явлений.

§ 7. Спиновые волны

Строго говоря, предыдущие два параграфа — отступление от нашей основной темы, так как посвящены не *природе* ферромагнетизма, а свойствам реальных образцов конечных размеров. В этом параграфе мы возвращаемся к описанию природы ферромагнитного состояния. Нам предстоит узнать, как зависит от температуры спонтанный магнитный момент ферромагнетика при низкой температуре — вблизи абсолютного нуля. Формула (3.5), как мы отмечали, не согласуется с результатами измерений температурной зависимости магнитного момента.

Для выяснения температурной зависимости физических величин необходимо знать, как движутся атомные частицы, из которых состоит тело. Мы уже имели возможность в этом убедиться, когда рассматривали магнитные свойства металлов (гл. 2, §§ 4, 5). Статистическая физика связывает движение отдельных атомных частиц с макроскопическими свойствами тел. Когда речь идет о газе, ясно, что означают слова «отдельная атомная частица». А что они означают в твердом теле, которое именно тем и отличается от газа, что в нем нет *отдельных* атомных частиц, так как частицы взаимодействуют друг с другом? Как мы увидим, роль отдельных атомных частиц в кристаллах играют *квазичастицы* — о них речь пойдет ниже.

Мы произнесли много непонятных слов: в заглавии — спиновые волны, в тексте — квазичастицы; добавим к ним

еще одно малопонятное словосочетание: энергетический спектр физической системы. В этом параграфе мы расскажем об энергетическом спектре ферромагнетика. Что все это значит, надеемся, станет ясно чуть позже.

Напомним замечание, сделанное по поводу модели Кюри—Вейсса (стр. 110): энергия ферромагнетика, вообще говоря, не определяется однозначно намагниченностью. Только при полном магнитном упорядочении, когда все атомные магнетики параллельны друг другу, энергия выражается через полный магнитный момент тела. Это и позволило связать константу α феноменологической теории с обменным интегралом A ; — см. формулу (3.11). Причина однозначной связи в том, что полное упорядочение можно создать единственным способом.

Для дальнейшего нам удобно говорить не о магнитном моменте, а о спине ферромагнетика.

Итак, в основном состоянии ферромагнетика спины всех атомов «параллельны» друг другу. Их общее «направление» *) задается, например, осью анизотропии, вдоль которой приложено магнитное поле. Всякое отклонение спина от этого направления сопровождается увеличением энергии. Предположим, что атом с отклоненным спином находится в узле кристаллической решетки с номером i (рис. 50). Тогда, казалось бы, энергия ферромагнетика будет отличаться от энергии основного состояния (3.9) за счет изменения величины взаимодействия i -го атома со своими ближайшими соседями. Однако такое наглядное представление оказывается обманчивым — оно не учитывает квантовой природы спина. Конечно, состояние, в котором спин i -го атома отклонен, может существовать. Но ведь нам этого мало: мы хотим чтобы оно было *стационарным* — обладало *определенной энергией*. А это уже — чрезмерное требование. Как мы

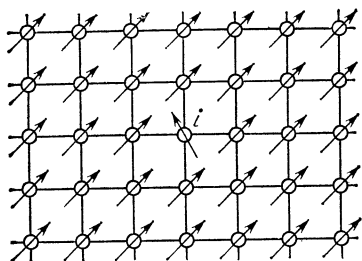


Рис. 50. Спин i -го атома отклонен от общего «направления».

*) Еще раз обратим внимание: «направление» спина (и вообще квантового момента) — удобный способ обозначать состояния с данным значением проекции спина,

уже говорили (гл. 1, § 4), в квантовой механике отнюдь не любые физические величины могут одновременно иметь определенные значения. В частности, для ферромагнетика, т. е. для системы спинов, поведение которых описывается гамильтонианом (3.8'), энергия системы и проекция спина i -го атома (если она отличается от проекций спинов остальных атомов) не могут иметь одновременно определенные значения. Это утверждение столь важно для понимания дальнейшего, что мы проиллюстрируем его на простейшей спиновой системе из двух электронов (спин $= 1/2$), связанных обменным взаимодействием (см. формулу (1.39)).

Из таблицы II на стр. 46 видно, что величина скалярного произведения $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$ (а значит, и энергия) определяется значением полного спина системы двух электронов, причем из четырех стационарных состояний только в двух проекция каждого спина в отдельности определена. Это состояния с $S = 1$, а $S_z = +1$ и $S_z = -1$. В этих состояниях каждый из электронов имеет определенную проекцию спина: при $S_z = 1$ у обоих электронов $s_z = +1/2$, а при $S_z = -1$ у обоих $s_z = -1/2$. В двух остальных состояниях ($S = 0$ и $S = 1$ при $S_z = 0$) проекции $s_z = 1/2$ и $s_z = -1/2$ для каждого электрона «перепутаны», т. е. в этих состояниях каждый из электронов не имеет определенной проекции спина.

Для ферромагнетика аналогом состояний с $S = 1$ и $S_z = \pm 1$ являются состояния с $S = Ns$ и $S_z = \pm Ns$ — состояния с наименьшей обменной энергией (при $A > 0$, конечно) и, в то же время, состояния с определенным значением проекции спина каждого атома (для любого i $s_{iz} = +s$, если $S_z = Ns$, и $s_{iz} = -s$, если $S_z = -Ns$). В остальных стационарных состояниях (как и в случае двух электронов) проекции спинов отдельных атомов не имеют определенных значений. Таблица II подсказывает нам еще, каким образом следует характеризовать стационарные состояния систем спинов, связанных обменным взаимодействием (обратим внимание, что гамильтониан (3.8'), свойства которого мы изучаем, есть обобщение гамильтониана (1.39)). Согласно таблице во всех четырех стационарных состояниях проекция полного спина имеет определенное значение. Это свойство стационарных состояний сохраняется и для интересующего нас случая — системы атомных спинов, описываемых гамильтонианом (3.8'). Поэтому, хотя и нет стацио-

нарного состояния с «отклоненным» спином в данном узле,

существуют стационарные состояния с определенным значением S_z -проекции полного спина всего ферромагнетика на ось анизотропии.

Интуитивно ясно, что при низких температурах, которые нас интересуют, существенны состояния, близкие к основному. Рассмотрим стационарное состояние с $S_z = Ns - 1$, т. е. с минимальным уменьшением проекции полного спина. Такое состояние хотелось бы реализовать, изменив проекцию спина одного атома на единицу: $s \rightarrow s - 1$. Но, как мы видели, квантовая механика этого не допускает. Следовательно, отклоненный спин (спин с проекцией $s - 1$) должен принадлежать всему кристаллу. Часто говорят, что он «размазан» по всей кристаллической решетке. Наглядно такую ситуацию можно представлять себе как переход отклоненного спина от атома к атому благодаря обменному взаимодействию. На квантовом языке это означает, что Ψ -функция стационарного состояния с $S_z = Ns - 1$ имеет вид волн и описывает последовательное отклонение спинов атомов в узлах кристаллической решетки. Она очень напоминает волну де-Бройля, о которой говорилось в связи со свойствами свободных частиц (гл. 1, § 4). Ее называют *спиновой волной* (отсюда и название параграфа).

Как и волна де-Бройля, спиновая волна характеризуется волновым вектором \mathbf{k} , с которым, по аналогии со свободной частицей, можно связать импульс

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}. \quad (3.23)$$

Спиновая волна, как всякое стационарное состояние, характеризуется энергией. Ее принято отсчитывать от энергии основного состояния. Для свободной частицы энергия $\epsilon = p^2/2m = \hbar^2 k^2/2m$, где m — масса частицы. Энергия спиновой волны ϵ тоже зависит от волнового вектора. Если ферромагнетик представляет собой простую кубическую решетку, то

$$\epsilon(\mathbf{k}) = 2A(3 - \cos k_x a - \cos k_y a - \cos k_z a), \quad (3.24)$$

где a — постоянная решетки — расстояние между ближайшими соседними атомами; k_x , k_y , k_z — проекции волнового вектора \mathbf{k} на ребра кубической ячейки кристалла.

Мы не только из педагогических соображений сравнивали спиновую волну с частицей. Сходство действительно очень велико; и частица, и спиновая волна имеют одинаковые динамические характеристики: импульс p и энергию ϵ — функцию импульса. Подчеркнем, что для волны последнее обстоятельство — следствие квантовой механики *); энергия классической волны зависит от амплитуды и потому может быть сколь угодно малой. Сходство между квантовой спиновой волной и частицей столь велико, что «вводят» специальную частицу с импульсом $p = \hbar k$ и энергией $\epsilon = \epsilon(p)$, подчиняющейся формуле (3.24). Эту частицу называют *магноном*. Перечитайте, пожалуйста, еще раз все, что сказано о соотношениях де-Бройля (стр. 27). «Введение» магнона означает прочтение формул (1.19), (1.20) справа налево — *признание за спиновой волной корпускулярных свойств*.

Магنون — не совсем обычная частица. Не надо забывать, что она есть не что иное, как элементарное возбуждение упорядоченных магнитных моментов ферромагнетика — волна отклонений спина. Перейдет ферромагнетик в основное состояние — магنون исчезнет. Обычные частицы (электроны, протоны, атомы...) не исчезают и не появляются из ничего.

Для того чтобы подчеркнуть специфику частиц, вводимых для описания элементарных возбуждений макроскопических тел, их называют *квазичастицами*.

Мы несколько раз уже подчеркнули, что спиновая волна — элементарное возбуждение. В каком смысле волна отклонений спинов элементарна, ведь она «затрагивает» все атомы ферромагнетика? В том и только в том, что это возбуждение нельзя разложить на более простые — более простых стационарных состояний ферромагнетика с проекцией спина, равной $N_s - 1$, нет.

Из трех непонятных терминов, введенных в начале этого параграфа, два (спиновая волна и квазичастица) мы уже объяснили. Остался третий — энергетический спектр. Сейчас речь пойдет об энергетическом спектре ферромагнетика.

Итак, при минимально возможном изменении спина ферромагнетика, а значит, и его магнитного момента,

*) По существу, это результат пространственного квантования спина, проекция которого может изменяться только дискретно (см. § 5, формулу (1.23)).

энергия ферромагнетика изменяется на величину $\epsilon(\mathbf{k})$, которая зависит от волнового вектора \mathbf{k} . Как мы уже говорили, задание магнитного момента кристалла не определяет однозначно его энергии. Имеется целая *полоса* возможных (разрешенных) значений энергии, соответствующих магнитному моменту, равному $(Ns - 1) 2\mu$ (при $J = s g = 2$, а $g\mu$ — наименьшее изменение проекции магнитного момента отдельного атома). Согласно формуле (3.24) ширина этой полосы равна $12 A$, так как $\epsilon(\mathbf{k}) = 0$ при $ak_x = ak_y = ak_z = 0$ и $\epsilon(\mathbf{k}) = 12 A$ при $ak_x = ak_y = ak_z = \pm\pi$ (рис. 51). Надо подчеркнуть,

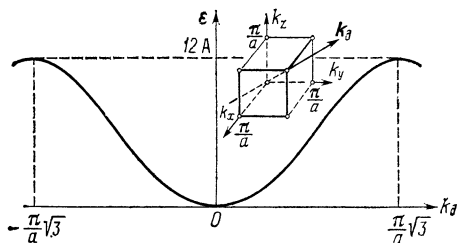


Рис. 51. Зависимость энергии магнона ϵ от проекции $k_{||}$ волнового вектора \mathbf{k} на пространственную диагональ куба.

что полоса разрешенных значений энергий непосредственно (без щели) примыкает к энергии основного состояния E_s , заданной формулой (3.9). Возникновение полосы обусловлено обменной энергией. Это ясно видно из того, что ширина ее обращается в нуль при $A \rightarrow 0$ (см. формулу (3.24)).

Забудем на минуту об обменном взаимодействии. Пусть кристалл состоит из N тождественных невзаимодействующих атомов, причем все они находятся в основном состоянии. Каждый из атомов имеет свою систему уровней, правда, все эти системы тождественны. Рассмотрим минимальное возбужденное состояние нашего «кристалла». Ясно, что для этого надо перевести один из атомов в наиболее низкое возбужденное состояние. Какой атом, безразлично — они одинаковы. Одной и той же энергией возбуждения соответствует N (по числу атомов) разных состояний, так как состояние определяется не только энергией, а в данном случае, и тем, какой атом возбужден. Об уровне энергии, которому соответствует больше

одного состояния, говорят, что он *вырожден* *), в данном случае N -кратно вырожден, причем N — фантастически огромное число ($\sim 10^{23}$ на 1 см^3). Обменное взаимодействие «снимает» вырождение, т. е. вместо одного вырожденного уровня появляются N уровней, расположенных в полоске шириной 12 А . При формальном стремлении N к бесконечности расстояния между уровнями стремятся к нулю, и разрешенные уровни энергии заполняют всю полосу. Возникает *энергетическая зона* — зона разрешенных значений энергии. Повторим и зафиксируем:

обменное взаимодействие снимает вырождение и превращает уровень в энергетическую зону.

Отсутствие щели между основным состоянием ферромагнетика и состояниями с одним магноном или что то же самое, равенство нулю энергии спиновой волны с $k = 0$ имеет глубокий физический смысл. Возбуждение с нулевым импульсом (или с бесконечной длиной волны) соответствует повороту магнитного момента ферромагнетика как целого (проекция полного спина на ось при этом изменяется на единицу). *При таком повороте энергии не может измениться, так как обменное взаимодействие изотропно.* Спиновая волна с отличным от нуля волновым вектором описывает неоднородное возбуждение ферромагнетика. Не удивительно, что энергия такой волны отлична от нуля. Если воспользоваться понятием магнона, то удобно представить, что энергия $\varepsilon(\mathbf{p})$ есть энергия движения магнона, его кинетическая энергия. Тогда естественно, что $\varepsilon(\mathbf{p}) = 0$ при $\mathbf{p} = 0$.

Сходство магнона с частицей особенно отчетливо для магнонов с малыми импульсами. Так как при $ak_j \ll 1$ ($j = x, y, z$)

$$\cos ak_j \approx 1 - \frac{1}{2} (ak_j)^2,$$

то из формул (3.24) и (3.23) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{p}) &= A \frac{a^2 p^2}{\hbar^2} \quad \text{при} \quad ap \ll \hbar, \\ p^2 &= \hbar^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

*) К сожалению, слово «вырождение» имеет в физике несколько смыслов (ср. с термином «вырожденный газ» (стр. 88)).

В таком виде зависимость энергии магнона от импульса такая же, как для свободной частицы с массой $m^* = \hbar^2/2Aa^2$. Величину m^* называют *эффективной массой магнона*. То, что эффективная масса обратно пропорциональна обменному интегралу, естественно: более легким частицам легче двигаться, а движение магнона обусловлено обменным взаимодействием.

Если ферромагнетик находится во внешнем магнитном поле, по направлению которого и выстраиваются магнитные моменты атомов, то изменение проекции спина отдельного атома на единицу сопровождается возрастанием энергии на величину $2\mu H$. В результате и энергия спиновой волны (3.24) получит аналогичную добавку:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = 2A(3 - \cos ak_x - \cos ak_y - \cos ak_z) + 2\mu H. \quad (3.26)$$

Эта формула напоминает выражение (2.20) для энергии электрона в магнитном поле. Зависящая от импульса $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ обменная часть энергии аналогична кинетической энергии электрона, а добавка $2\mu H$ — энергии электронного спина в магнитном поле. Поэтому ее можно интерпретировать как энергию *спина магнона* в магнитном поле H . Множитель 2 означает, что магнону следует приписать спин, вдвое больший электронного, т. е. единицу. С другой стороны, у электрона спиновая добавка к энергии имеет, как и следует, два значения: $+\mu H$ и $-\mu H$ соответственно ориентации спина по и против поля (направление спина и магнитного момента у электрона противоположны, так как $e < 0$). У спина 1 есть три проекции: $+1$, 0 , -1 . Казалось бы, спиновая добавка к энергии магнона должна была бы тоже иметь три значения $-2\mu H$, 0 , $+2\mu H$. Тот факт, что в формуле (3.26) есть только одно значение спиновой добавки, означает, что из трех возможных состояний с разными проекциями спина реализуется только одно — с проекцией, равной -1 . Физическая причина такого результата понятна: рождение магнона (спиновой волны) обусловлено уменьшением проекции спина ферромагнетика; чтобы это произошло, магнону необходимо иметь отрицательную проекцию спина. Последнее замечание о реализации одного из трех спиновых состояний магнона не отменяет того, что

магнон — квазичастица со спином, равным единице.

Выражение (3.24) для энергии магнона $\varepsilon(\mathbf{k})$ обладает периодичностью по каждой из трех переменных по k_x , по k_y и по k_z (косинус — периодическая функция). Все три периода одинаковы и равны $2\pi/a$. Периодичность энергии — непосредственное следствие периодичности кристалла. Этим свойством обладает не только энергия магнона, но и его волновая функция. Это означает, что два состояния с волновыми векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}' физически неразличимы, если

$$k'_x - k_x = \frac{2\pi}{a} n_1, \quad k'_y - k_y = \frac{2\pi}{a} n_2, \quad k'_z - k_z = \frac{2\pi}{a} n_3,$$

а n_1, n_2, n_3 — целые числа. Последние равенства можно записать компактно, введя вектор \mathbf{K} с «целочисленными» компонентами:

$$K_x = \frac{2\pi}{a} n_1, \quad K_y = \frac{2\pi}{a} n_2, \quad K_z = \frac{2\pi}{a} n_3.$$

Итак, два состояния физически неразличимы, если волновые векторы \mathbf{k} и \mathbf{k}' отличаются на вектор \mathbf{K} :

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{K}.$$

Поэтому все различные состояния магнона определяются значениями волновых векторов из кубической ячейки с ребрами, равными $2\pi/a$. Из векторов \mathbf{K} можно построить (на бумаге, конечно) кристаллическую решетку. Она называется *обратной решеткой*. Все различные состояния магнона имеют волновые векторы из одной элементарной ячейки обратной решетки. Если умножить длину ребер элементарной ячейки обратной решетки на \hbar , то мы получим ячейку, содержащую те значения импульса, которым соответствуют различные состояния магнона.

У обычной частицы дело обстоит не так. Состояния с различными «настоящими» импульсами всегда отличаются друг от друга, импульс может принимать любое значение, даже сколь угодно большое *). Этим импульс свободной частицы отличается от импульса, который мы

*) Правда, при этом для энергии надо пользоваться не привычной формулой $\varepsilon = p^2/2m$, а релятивистской: $\varepsilon = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$ (с релятивистской механикой, т. е. с теорией относительности, можно познакомиться по книге Ю. И. Соколовского «Теория относительности в элементарном изложении». М.: Наука, 1964).

приписали квазичастице (в данном случае магнону). Чтобы подчеркнуть это различие, импульс квазичастицы называют *квазиимпульсом*. Подчеркнем: приставка «квази» в слове квазиимпульс использована не потому, что речь идет о квазичастице. Можно привести примеры того, что состояние настоящей частицы в стационарном состоянии характеризуется квазиимпульсом и, наоборот, квазичастицы — импульсом. Первый пример — частица — электрон в кристаллической решетке *), а второй — квазичастица — фотон (квант электромагнитного поля) в пустоте.

Замена импульса квазиимпульсом — следствие геометрических свойств того мира, в котором «живут» магноны. Состояния любых квазичастиц — квантовых аналогов элементарных возбуждений кристаллов — описываются квазиимпульсами, а не импульсами. Мы еще с этим встретимся.

Несколько отвлекаясь, разъясним, что мы вкладываем в слова «геометрические свойства мира». Кристаллическая решетка совмещается сама с собой, если ее переместить на вектор, соединяющий два эквивалентных узла. Наименьший сдвиг, совмещающий кубическую решетку саму с собой, равен a и должен производиться вдоль одной из осей: x , y или z (см. рис. 50). А пустое пространство однородно и поэтому совмещается само с собой при любом сдвиге — даже при бесконечно малом. Длина ребра ячейки обратной решетки, обратно пропорциональная a , определяет область задания квазиимпульсов. В случае пустого пространства мы можем считать постоянную решетки равной нулю. Тогда ячейка обратной решетки оказывается бесконечно большой. В этом смысле импульс есть квазиимпульс с бесконечно большой ячейкой обратной решетки.

С п и н о в ы е к о м п л е к с ы

Итак, элементарное (минимальное) возбуждение магнитной системы ферромагнетика можно (и следует) представлять себе как рождение квазичастицы — магнона, который характеризуется квазиим-

*) Когда мы рассматривали свойства электронов проводимости в металлах, мы упростили дело, «выкинув» из металла кристаллическую решетку, состоящую из положительных ионов (см. гл. 2, § 4).

пульсом $p = \hbar k$ и энергией $\varepsilon = \varepsilon(p)$, определенной формулой (3.24) или формулой (3.26). Естественно задаться вопросом, а нельзя ли любое возбужденное состояние ферромагнетика описать как состояние с тем или иным числом магнонов? Положительный ответ на этот вопрос означал бы, что формулы (3.24) и (3.26) полностью определяют энергетический спектр ферромагнетика. К сожалению, ответ будет отрицательный. Точнее: вообще говоря, отрицательный. Это значит, что иногда можно, а иногда нельзя.

Для того чтобы понять, в чем тут дело, рассмотрим простейший случай, когда возбуждение магнитной системы есть минимальное отклонение двух спинов или

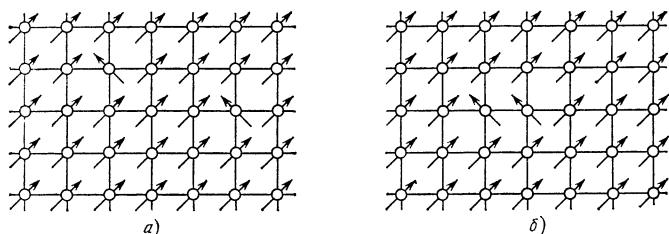


Рис. 52. Среди нестационарных состояний кристалла есть такие, в которых спины двух атомов «отклонены» от общего направления. Эти два атома могут быть расположены далеко друг от друга (а) или рядом (б).

двукратное отклонение одного *). Очень соблазнительно с каждым отклонением связать свой магнон. Тогда энергия возбуждения будет суммой энергий этих двух магнонов. Однако на самом деле ситуация сложнее. Дело вот в чем: среди нестационарных (!) состояний с двумя отклоненными спинами есть и такие, когда отклоненные спины находятся рядом (рис. 52). Но при этом согласно формуле (3.8'), сказывается обменное взаимодействие между ними. Это обстоятельство приводит к тому, что два магнона *взаимодействуют* друг с другом.

Взаимодействие между любыми частицами проявляется двояко: либо оно приводит к рассеянию частиц

*) Речь идет о состоянии ферромагнетика с проекцией спина $S_z = Ns - 2$. Если спин отдельного атома $s = 1/2$, то двукратное отклонение спина отдельного атома невозможно: если проекция спина атома уменьшилась с $s_z = 1/2$ до $s_z = -1/2$, то больше ей уменьшаться некуда.

друг на друге, либо к образованию связанной системы из двух частиц (конечно, если частицы притягиваются друг к другу). В первом случае, при рассеянии, частицы сближаются, а затем расходятся, так что подавляющую часть времени они находятся так далеко друг от друга, что их взаимодействием попросту можно пренебречь. При этом энергия и импульс двух частиц с большой точностью равны сумме их энергий и импульсов.

Во втором случае образование связанного состояния означает, что частицы «не разлучаются» (существует максимальное расстояние, на которое частицы могут удалиться одна от другой). Хорошим примером такой системы из двух «частиц» может служить Земля и Луна, движущаяся вокруг Земли по почти круговой орбите. Энергия Луны, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, отрицательна (отрицательна при притяжении потенциальная энергия, если принять, что энергия взаимодействия стремится к нулю при бесконечном удалении тел друг от друга). Если энергия движущейся «частицы» положительна (как у комет), то, несмотря на притяжение, связанное состояние отсутствует — комета уходит от Земли, а иногда и вовсе из Солнечной системы.

Квантовым аналогом системы Земля—Луна является атом водорода. Состояния с отрицательной энергией — связанные состояния (их энергия определяется формулой (1.21)). Энергия, равная нулю, отделяет связанные состояния электрона в атоме от свободных состояний, в которых электрон рассеивается ядром. Оба примера (и космический, и атомный) служат для формулировки утверждения:

в случае притяжения в зависимости от значения энергии состояния системы двух частиц могут быть как связанными, так и свободными.

Вернемся к системе из двух магнонов. Выделим их движение как целого (с квазиимпульсом, равным сумме их квазиимпульсов) и относительное движение. Как оказывается, магноны *притягиваются друг к другу*, причем величина притяжения зависит от их суммарного квазиимпульса. Для частиц в пустоте такого быть не может. Мы всегда можем перейти в инерциальную систему координат, в которой центр тяжести частиц по-

коится, т. е. их суммарный импульс равен нулю. От скорости, с которой движется выбранная нами инерциальная система отсчета, ничего не может зависеть и не зависит (в этом состоит утверждение принципа относительности Галилея). В кристалле подобный переход невозможен — движение квазичастиц происходит относительно кристаллической решетки, которая является избранной системой отсчета. Зависимость величины взаимодействия между магнонами от их суммарного квазиимпульса — еще одно проявление фундаментального отличия квазиимпульса от импульса.

Если полный квазиимпульс больше некоторого определенного значения, то притяжение достаточно велико, и наряду с состояниями, в которых магноны рассеиваются, существует состояние (с тем же суммарным квазиимпульсом), в котором магноны образуют связанную систему. Энергия такого состояния меньше суммы энергий свободных магнонов. Наглядно это можно представить себе как движение по кристаллической решетке двух находящихся рядом отклоненных спинов (рис. 52, б).

Связанное состояние двух магнонов называется *спиновым комплексом*.

Итак, кроме состояний с двумя свободными магнонами, в определенных условиях существует состояние с меньшей энергией, в которых два магнона образуют спиновый комплекс. В случае трех спиновых отклонений существуют три типа состояний: три свободных магнона, спиновый комплекс из двух магнонов и один свободный магнон, и наконец, комплекс из трех магнонов. Обобщение на большее число спиновых отклонений очевидно...

Как видно, энергетический спектр ферромагнетика имеет сложную структуру. В принципе, знание энергетического спектра тела позволяет вычислить все его термодинамические характеристики: теплоемкость, магнитный момент и т. д. Однако если спектр слишком сложен, то соответствующие формулы становятся необозримыми и, значит, бесполезными. Вычисление термодинамических характеристик ферромагнетика существенно упрощается, если его температура значительно меньше температуры Кюри T_c . Как мы увидим, в этом случае основной вклад в термодинамические характеристики дают состояния с малым числом магнонов, когда взаимодействие между ними проявляется слабо. Это де-

дает законным полное пренебрежение межмагнитным взаимодействием. Следовательно,

при низких температурах систему магнов можно рассматривать как идеальный газ.

Мы еще вернемся к этой удивительно продуктивной модели, а сейчас обратим внимание на заманчивую возможность рассматривать спиновые волны, исходя из классического, а потому весьма наглядного описания.

§ 8. Спиновые волны как волны неоднородной прецессии

Отвлечемся от квантовой природы спинов и рассмотрим их как магнитные стрелки (магнетики), которые в ферромагнетике, как мы знаем, сильно взаимодействуют между собой. За взаимодействие ответственные обменные силы, которые стараются выстроить магнетики параллельно друг другу. В основном состоянии они действительно выстроены и магнитный момент единицы объема ферромагнетика \mathcal{M} (или плотность магнитного момента, или намагниченность — это различные названия одного и того же) есть попросту арифметическая сумма магнитных моментов отдельных атомов, в этом объеме расположенных.

А теперь зафиксируем свое внимание на каком-нибудь одном магнитике и запишем его энергию взаимодействия со всеми остальными магнетиками. Для этого просто надо опустить суммирование по одному из индексов в формуле (3.8'). Кроме того, умножим и разделим все выражение на μ^2 , чтобы перейти от спинов атомов к их магнитным моментам. Итак, энергия взаимодействия i -го магнитного момента со всеми остальными магнетиками имеет такой вид:

$$E_i = -\mu_i \left(\frac{A}{2\mu^2} \sum_k' \mu_k \right), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.28)$$

Сравним это выражение с формулой (1.26), описывающей взаимодействие магнитного момента с магнитным полем H .

Видно, что вектор $\frac{A}{2\mu^2} \sum_k' \mu_k$ играет роль магнитного поля.

Его так и называют — *эффективное магнитное поле* и

обозначают

$$H_{\text{эфф}} = \frac{A}{2\mu^2} \sum_k' \mu_k. \quad (3.29)$$

Отклоненный от магнитного поля H магнитный момент вращается вокруг поля с частотой γH (гл. 1, § 6). Можно было бы думать, что отклоненный от равновесного положения магнитный момент вращается с частотой, которую легко вычислить по формуле (3.29), зная: в равновесии все магнитные моменты параллельны. Однако дело обстоит сложнее. Выражение (3.28) описывает взаимодействие с окружением любого из N магнитных моментов (N — число магнитных атомов в кристалле).

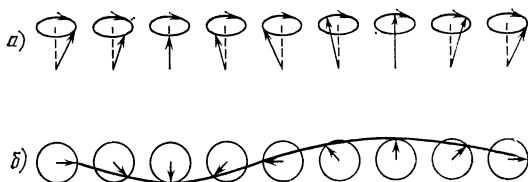


Рис. 53. Неоднородная прецессия атомных спинов: а) вид цепочки спинов сбоку; б) вид сверху — показана одна волна, изображенная линией, проходящей через концы спиновых векторов.

Это значит, что таких, как (3.28), выражений N . Движения (вращения) всех магнитных моментов взаимосвязаны. Нельзя выяснить, как движется отдельный магнитный момент, не исследуя движений всех магнетиков. Мы уже об этом говорили, когда описывали квантовые состояния системы спинов.

Исследование вращения всех магнетиков показывает, что наиболее простой формой их движения являются волны неоднородной прецессии. Что собой представляет неоднородная прецессия, нетрудно понять — взгляните на рис. 53. Каждая волна характеризуется волновым вектором k . Можно вычислить частоту волны ω . Она оказывается функцией волнового вектора, которую можно определить, только исследовав уравнения движения всех атомных магнитных моментов. Они выводятся с помощью выражения (3.28). Мы, к сожалению, лишены возможности проделать это исследование и должны ограничиться констатацией. Квантовый и классический подходы приводят к одинаковым результатам; зависимость

частоты волны неоднородной прецессии ω от волнового вектора \mathbf{k} совпадает с энергией магнона (3.24), если ее разделить на постоянную Планка \hbar (вспомните соотношение де-Бройля).

Другими словами,

магнон — волна неоднородной прецессии атомных магнитных моментов.

Мы уже неоднократно подчеркивали, что обменное взаимодействие изотропно. Выстраивая магнитные моменты, оно не выделяет определенного направления, куда должен быть направлен магнитный момент \mathbf{M} . Направление ему задают либо магнитное поле, либо анизотропные силы, описанные в § 4 этой главы.

Изотропия обменного взаимодействия проявляется в том, что частота волны прецессии (или энергия магнона) обращается в нуль при стремлении к нулю волнового вектора \mathbf{k} . Если $\mathbf{k} = 0$, то это — волна однородной прецессии ($\lambda = 2\pi/k = \infty!$), т. е. попросту поворот всех магнитных моментов на один и тот же угол, чего обменное взаимодействие вовсе «не замечает», как мы уже знаем. Но если «включить» необменные взаимодействия (энергию анизотропии, магнитное поле), то однородная прецессия всех магнитных моментов будет происходить с вполне определенной частотой. Назовем ее ω_0 . В простейших случаях она добавляется к частоте неоднородной прецессии.

Волна прецессии магнитных моментов атомов учитывает дискретную структуру кристалла: вращаются именно *атомные* магнитики. Если интересоваться волнами с малыми волновыми векторами ($ak \ll 1$), а, как мы поймем (см. § 10), они для нас наиболее интересны, то можно ограничиться *макроскопическим* описанием движения магнитных моментов, задавая среднюю плотность магнитного момента ферромагнетика $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ — векторную сумму атомных магнитных моментов в единице объема.

В волне неоднородной прецессии с малым волновым вектором колеблется именно плотность магнитного момента ферромагнетика *). В частности, однородная пре-

*) Слово «колеблется» надо понимать условно. Это именно — *неоднородная прецессия*. Хотя по ферромагнетику распространяется волна, $\mathbf{M}^2(\mathbf{r}, t) \equiv M_0^2$ (M_0 — плотность магнитного момента в насыщении), магнитный момент только поворачивается!

цессия это — вращение магнитного момента всего тела, а магнон с малым импульсом (напомним: импульс $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$) — волна неоднородной прецессии намагниченности (плотности магнитного момента).

Преимущество классического подхода — в его простоте и наглядности. Но надо помнить, что квантовый подход точнее. Поэтому важно знать пределы применимости классического описания, иначе можно допустить ошибку.

§ 9. Газ магнонов

Займемся теперь свойствами ферромагнетика при температуре, низкой по сравнению с температурой Кюри T_c , когда состояние ферромагнетика близко к основному, предельно упорядоченному.

При низких температурах магнонов в ферромагнетике мало, поэтому они редко сближаются друг с другом и взаимодействие между ними несущественно. Как мы уже говорили, взаимодействием можно вовсе пренебречь и рассматривать систему магнонов как идеальный газ.

Конечно, могут образовываться спиновые комплексы, но при низких температурах их крайне мало *) — ими тоже можно пренебречь.

Итак, при низких температурах магноны образуют идеальный газ квазичастиц. Но при низких температурах особенно отчетливо проявляются квантовые свойства систем не только квазичастиц, но и обычных «настоящих» частиц (см. гл. 2, § 4). Поэтому естественно возникает вопрос: магноны — бозоны или фермионы? Какой статистикой — Бозе—Эйнштейна или Ферми—Дирака — описывать их коллективные свойства?

Мы уже отмечали, что частицы с нулевым и целым спином — бозоны, а с полуцелым — фермионы. Эту теорему можно распространить и на квазичастицы. У магнона спин единица, так что магноны — бозоны, а газ магнонов — бозе-газ.

*) Как мы увидим (а скорее всего, и интуитивно ясно), при $T \ll T_c$ среди магнонов больше всего таких, энергия которых $\epsilon \lesssim kT$, т. е. значительно меньше ширины магнонной зоны $12 A$ (согласно (3.11) $kT_c = \frac{z}{4} A$). Квазиимпульс у таких магнонов мал, и они не могут образовывать спиновый комплекс, а магнонов с большими импульсами очень мало.

Бозе-газ

Теперь самое время выполнить обещание и рассказать о свойствах вырожденного бозе-газа, т. е. бозе-газа при температурах, значительно меньших $T_{\text{кв}} = \frac{\hbar^2}{k m} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}$ (см. формулу (2.17)). Вырожденных бозе-газов «настоящих» частиц при таких температурах не существует: они все при $T \gg T_{\text{кв}}$ превращаются в жидкость и все (кроме гелия) затвердевают. Мы расскажем о том, какими свойствами обладал бы бозе-газ, согласно законам квантовой статистики, если бы он существовал *).

Итак, объем V наполнен N бозе-частицами при $T \ll T_{\text{кв}}$. Каждая частица движется по законам квантовой механики, и ее энергия определяется значением ее импульса: $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$. Напомним, что координата частицы не имеет при этом определенного значения. Начнем, как и в случае ферми-газа (стр. 88), с абсолютного нуля температуры, когда система должна находиться в основном состоянии — в состоянии с наименьшей энергией. Так как бозоны не подчиняются принципу Паули, то ничто не мешает всем им перейти в состояние с равным нулю импульсом. Это макроскопическое скопление частиц в состоянии с $p = 0$ называется *конденсатом*. Итак,

основное состояние газа бозонов — конденсат.

Элементарное возбуждение газа бозонов — это выход одной частицы из конденсата, т. е. появление (рождение) движущейся частицы, частицы с $p \neq 0$. Так как большинство способов обнаружения частиц связано с фиксацией их движения, то частицы в конденсате как бы вовсе «не существуют», а «рождаются», когда приходят в движение. Квантовая статистика позволяет определить среднее число частиц с импульсом $p \neq 0$ — равновесную функцию распределения при температуре $T < T_{\text{кв}}$:

$$\bar{n}_p = \frac{1}{e^{\epsilon(p)/kT} - 1}. \quad (3.30)$$

Если нас интересует средняя плотность $\bar{n}(\epsilon)$ числа частиц в бесконечно малом интервале энергий от ϵ до $\epsilon + d\epsilon$, то последнее выражение надо умножить на

*) Сейчас предпринимаются попытки искусственно создать вырожденный бозе-газ.

плотность состояний *) $g(\epsilon)$, равную $\frac{(2s+1)V}{\pi^2 \hbar^3 \sqrt{2}} m^{3/2} \sqrt{\epsilon}$, где s — спин частицы ($s = 0, 1, 2, \dots$):

$$\bar{n}(\epsilon) = \frac{(2s+1)V m^{3/2}}{\sqrt{2} \pi^2 \hbar^3} \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\epsilon/kT} - 1}. \quad (3.31)$$

Полное число *движущихся* бозе-частиц при температуре T вычисляется интегрированием по всем энергиям:

$$N_p = \frac{(2s+1)m^{3/2}}{\sqrt{2} \pi^2 \hbar^3} V \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1}. \quad (3.32)$$

Хотя при $\epsilon = 0$ подынтегральное выражение обращается в бесконечность, интеграл имеет вполне определенное значение, он растет пропорционально $T^{3/2}$. Число частиц в конденсате N_0 равно полному числу частиц N за вычетом N_p . При температуре $T = T_0$, где

$$T_0 \approx \frac{3,31}{2s+1} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}, \quad (3.33)$$

конденсат перестает существовать: при $T > T_0$ движутся все частицы. Обычно исследуют поведение бозе-газа, постепенно понижая температуру, поэтому температуру T_0 называют температурой *бозе-эйнштейновской конденсации*. При $T < T_0$ конечное число частиц не движется, находится в конденсате. Специфическое поведение бозе-газа должно проявляться во всех его термодинамических свойствах. Так, теплоемкость бозе-газа при $T < T_0$ пропорциональна *) $T^{3/2}$.

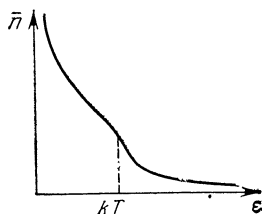


Рис. 54. Распределение частиц бозе-газа с $p \neq 0$ по энергиям в произвольных единицах. Площадь под кривой $\bar{n} = \bar{n}(\epsilon)$ равна полному числу N_p движущихся частиц газа в сосуде.

*) Мы рассказали о плотности состояний и объяснили, почему она пропорциональна $\sqrt{\epsilon}$ на стр. 89. Приведенная здесь формула отличается от формулы (2.19) тем, что написана для произвольного спина. Для электрона надо подставить $s = 1/2$, и мы получим при этом, естественно, формулу (2.19).

**) Теплоемкость классического газа не зависит от температуры, а теплоемкость ферми-газа падает до нуля по линейному закону.

В заключение этого раздела посмотрим, как распределены частицы по энергиям при $T < T_0$. Посмотрим буквально. На рис. 54 изображена средняя плотность частиц $\bar{n}(\epsilon)$. Видно, что практически все частицы сосредоточены на интервале от 0 до kT а при дальнейшем росте энергии плотность экспоненциально быстро спадает.

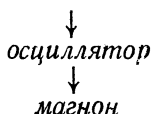
* * *

Вернемся к газу магнонов. Воспользуемся подходом, развитым в предыдущем параграфе и зафиксированном на стр. 150 (выделено курсивом). Начнем с волны неоднородной прецессии. Ее характеризует волновой вектор \mathbf{k} и частота ω . Раз есть частота (в данном случае $\omega(\mathbf{k})$), то можно говорить об «осцилляторе», колеблющемся с частотой $\omega(\mathbf{k})$. Что колеблется — не так важно, важно, что *колеблется*. Энергия осциллятора, согласно законам квантовой механики, как мы знаем, может принимать значения, равные

$$\epsilon_{n_k} = \frac{1}{2} \hbar \omega(\mathbf{k}) + n_k \hbar \omega(\mathbf{k}). \quad (3.34)$$

Мы нарочно в таком виде написали более привычную формулу $\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$, чтобы подчеркнуть: энергия $n_k \hbar \omega(\mathbf{k})$ есть энергия возбужденного состояния. Состояние ферромагнетика можно задать, задав числа n_k — степень возбуждения каждого осциллятора. Так как волне неоднородной прецессии можно сопоставить магнон с квазиимпульсом $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ и с энергией $\hbar \omega(\mathbf{k})$, то степень возбуждения осциллятора (число n_k) можно считать числом магнонов *) с волновым вектором \mathbf{k} или импульсом $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$. Итак — наглядная схема:

спиновая волна как волна неоднородной прецессии



*) Именно то, что энергия возбуждения может принимать в единицах $\hbar \omega(\mathbf{k})$ только целочисленные значения, оправдывает введение магнонов. Мы, конечно, приводим здесь отнюдь не строгий вывод. В теории ферромагнетизма приведенные здесь формулы доказываются строго. В частности, доказано, что имеет место формула (3.34), а она — главная для этой части нашего рассказа о газе магнонов.

При определении состояния ферромагнетика нет необходимости в знании точных (в каждое мгновение) значений чисел магнонов n_p (мы окончательно перешли на корпускулярный язык, заменив k на p). Для вывода температурной зависимости величин, характеризующих газ магнонов, достаточно знать *среднее* число магнонов с импульсом p — функцию распределения магнонов \bar{n}_p . Наша ближайшая задача — определение этой функции.

А пока еще одно отступление.

К в а н т о в ы й о с ц и л л я т о р

Обратимся к формуле (2.5) на стр. 72. В левой части равенства стоит отношение числа частиц с энергией ϵ_M к общему числу частиц. Это отношение можно рассматривать как вероятность W_M иметь частице данную энергию ϵ_M . Справа стоит

$$\frac{e^{-\frac{\epsilon_M}{kT}}}{\sum_M e^{-\frac{\epsilon_M}{kT}}},$$

т. е.

$$W_M = \frac{e^{-\frac{\epsilon_M}{kT}}}{\sum_M e^{-\frac{\epsilon_M}{kT}}},$$

причем суммирование в знаменателе производится по всем возможным квантовым состояниям. Это простое соотношение (если не конкретизировать, что такое ϵ_M) — основа физической статистики. Мы применим его к осциллятору с частотой ω . Тогда

$$W_n = \frac{e^{-n \frac{\hbar\omega}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \frac{\hbar\omega}{kT}}} \quad (3.35)$$

есть вероятность того, что осциллятор находится в n -м квантовом состоянии. Среднее значение *) любой физи-

*) В теории вероятностей такое среднее значение часто называют *математическим ожиданием*.

ческой величины, зависящей от степени возбуждения осциллятора, т. е. от числа n , находится умножением этой величины на W_n и суммированием по всем n . Прежде всего найдем среднее значение самой степени возбуждения:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n W_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n \frac{\hbar\omega}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \frac{\hbar\omega}{kT}}}.$$

Бесконечная сумма, стоящая в знаменателе, есть сумма членов геометрической прогрессии с первым членом, равным единице, и знаменателем прогрессии $e^{-\hbar\omega/kT}$. Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \frac{\hbar\omega}{kT}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right)^n = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}.$$

Сумма в числителе получается из суммы, стоящей в знаменателе, если последнюю продифференцировать по величине $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$ и взять с обратным знаком:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n \frac{\hbar\omega}{kT}} = - \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \right) \Big|_{x = \frac{\hbar\omega}{kT}}.$$

Таким образом, окончательно

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (3.36)$$

Прежде чем обсуждать эту важную формулу, выпишем значение средней энергии осциллятора:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}, \quad (3.37)$$

из которого сразу же видно, как совершается переход к классической статистике: при $\hbar\omega \ll kT$

$$e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT},$$

и мы убеждаемся, что

среднее значение энергии осциллятора в условиях, когда применимо классическое рассмотрение, равно температуре, выраженной в энергетических единицах: $\bar{\varepsilon} = kT$.

В этих же условиях среднее значение степени возбуждения осциллятора $\bar{n} \sim \frac{kT}{\omega}$. Формально множитель пропорциональности содержит постоянную Планка, но он не играет никакой роли, так как выпадает при вычислении средних значений.

Вывод формул (3.36), (3.37), который мы здесь воспроизвели, был впервые выполнен Максом Планком в 1900 г., когда он занимался исследованием излучения абсолютно черного тела, т. е. тела, которое излучает, но не отражает электромагнитных волн (небольшое отверстие в большой полости хорошо моделирует свойства абсолютно черного тела). Для того чтобы объяснить экспериментальные факты, ему пришлось сделать предположение, которое означало отказ от классической физики — признать, что осциллятор может находиться только в таких состояниях, в которых его энергия кратна $\hbar\omega$ (см. (3.34)). Значение постоянной Планка он подобрал таким, чтобы сходство между экспериментальной и теоретической кривой было наилучшим *).

* * *

Из схемы на стр. 154 становится ясным, что равновесная функция распределения магнонов

$$\bar{n}_p = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon(p)}{kT}} - 1}, \quad (3.38)$$

тождественна функции распределения частиц в бозе-газе при температуре ниже температуры бозе-эйнштейновской конденсации. Совокупность магнонов действительно представляет собой бозе-газ!

*) И сегодня, более чем через 80 лет после появления постоянной Планка на свет, мы не имеем никакой возможности ее *вычислить*. Она не вычисляется, так же как и другие фундаментальные константы физики: скорость света c , заряд электрона e . Их надо *измерять*. Интересно отметить, что наиболее точное значение постоянной Планка \hbar получено с помощью сверхпроводящего устройства, т. е. методами квантовой физики твердого тела,

Отличие формулы (3.38) от формулы (3.30) в том, что формула (3.38) описывает распределение всех магнов. Конденсат магнов отсутствует.

Если температура ферромагнетика значительно меньше температуры Кюри, то, как мы знаем из рассмотрения вырожденного бозе-газа, главную роль в его свойствах играют частицы (в данном случае квазичастицы — магны) с энергией, меньшей kT . Это позволяет воспользоваться приближенной формулой (3.25) и, кроме того, формулами (3.31) и (3.32), в которых, однако, надо заменить $2s + 1$ на 1, так как (помните?) из трех возможных спиновых состояний магна реализуется только одно с $s_z = -1$. Вместо массы частицы m надо подставить эффективную массу магна $m^* = \hbar^2/2Aa^2$ (см. стр. 142).

Знание равновесной функции распределения \bar{n}_p позволяет вычислять различные макроскопические величины — характеристики газа магнов, а значит, ферромагнетика. Наибольший интерес для нас представляет магнитный момент газа магнов в единице объема — его намагниченность. Этот важный вопрос требует отдельного параграфа.

§ 10. Намагниченность и теплоемкость ферромагнетика при низких температурах

Рассматривая магны в ферромагнетике, помещенном в магнитное поле, мы убедились, что каждый магн «несет на себе» направленный против намагниченности ферромагнетика магнитный момент, равный удвоенному магнетону Бора. Поэтому намагниченность единицы объема ферромагнетика $\mathcal{M}(T)$ есть разность между магнитным моментом при абсолютном нуле температуры $\mathcal{M}_0 = N\mu_s$ и магнитным моментом газа магнов. Последний же попросту равен числу магнов $N_{\text{магн}}$, умноженному на 2μ . Итак,

$$\mathcal{M}(T) = N\mu_s - 2\mu N_{\text{магн}}. \quad (3.39)$$

Если магнитное поле H невелико ($\mu H \ll kT$) (см. стр. 75), то его можно положить равным нулю и воспользоваться формулой (3.32), не забыв вместо m подставить эффективную массу магна и заменить $2s + 1$ единицей. В ре-

результате получим *):

$$\mathcal{M}(T) = N\mu_s \left[1 - 0,1 \left(\frac{kT}{A} \right)^{3/2} \right]. \quad (3.40)$$

Мы учли, что в каждой ячейке кристалла имеется один атом с магнитным моментом μ_s , т. е. $\frac{1}{a^3} = N$.

Эту зависимость, впервые выведенную Ф. Блохом в 1930 г., часто называют законом Блоха, или «законом $3/2$ », имея в виду показатель степени у температуры.

Теперь мы видим, сколь неправильный результат был нами получен из модели Кюри — Вейсса. И формула (3.5), и формула (3.40) — обе выведены в предположении, что между атомными магнитными моментами действуют только обменные силы. Однако в модели Кюри — Вейсса считается, что энергия системы спинов однозначно определяется суммарной намагниченностью, а из правильной квантовой механической теории следует существование магнонов, возбуждение которых с ростом температуры приводит к размагничиванию ферромагнитного образца. Степенной, а не экспоненциальный характер зависимости намагниченности, конечно, обусловлен тем, что число магнонов $N_{\text{магн}}$ растет по степенному закону. А почему $N_{\text{магн}}$ растет именно по степенному закону? Чтобы понять причину (формально это видно из формулы (3.32)), рассмотрим более сложный случай большого магнитного поля или очень низкой температуры ($\mu H \ll kT$). Для общности величину $2\mu H$ в формуле (3.26) обозначим ϵ_0 , подчеркивая, что это — энергия «неподвижного» магнона, магнона с $\mathbf{p} = 0$, и понимая, что она определяется всеми необменными взаимодействиями.

В этом случае число магнонов определяется формулой, очень похожей на формулу **) (3.32), только интегрирование ведется не от нуля, а от ϵ_0 :

$$N_{\text{магн}} = \frac{1}{4\pi^2 a^3} \frac{1}{A^{3/2}} \int_{\epsilon_0}^{\infty} \frac{\sqrt{\epsilon - \epsilon_0} d\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1}. \quad (3.41)$$

*) То, что в формуле (3.32) интегрирование ведется до бесконечности, не должно нас смущать: вклад состояний с энергией, большей kT , совершенно несуществен.

**) *Задача.* Воспользовавшись соображениями, которыми мы пользовались при получении выражения для плотности состояний $g(\epsilon)$ (см. стр. 89), и зависимостью энергии магнона от импульса при $p \ll \hbar/a$, выведите формулу (3.41).

Если $kT \ll \varepsilon_0$, то единиц в знаменателе можно пренебречь и число магнонов оказывается экспоненциально малым:

$$N_{\text{магн}} \approx \frac{1}{8\pi^{3/2}a^3} e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} \left(\frac{kT}{A} \right)^{3/2}. \quad (3.42)$$

Сравним теперь распределения магнонов по энергиям при $\varepsilon_0 = 0$ и при $\varepsilon_0 \neq 0$. Когда $\varepsilon_0 \neq 0$, распределение имеет максимум при $\varepsilon \approx kT$, т. е. у большинства магнонов энергия порядка температуры (выраженной в энергетических единицах), однако при $\varepsilon_0 \gg kT$ полное число частиц экспоненциально мало. Когда $\varepsilon_0 = 0$, большинство магнонов имеет энергию, меньшую kT , но общее число их пропорционально $(kT)^{3/2}$. Итак, все дело в том, отделена ли область разрешенных значений энергии от энергии основного состояния щелью или нет. Существование щели приводит к экспоненциальной зависимости числа магнонов, а значит, и намагниченности от температуры. Подчеркнем, что в ферромагнетиках щель имеет не обменное происхождение, именно поэтому правильный результат столь разительно отличается от результата, полученного в модели Кюри — Вейсса *).

Существование щели в энергетическом спектре возбужденных состояний макроскопического тела — явление очень частое. Естественно, оно всегда сопровождается экспоненциальной зависимостью тех макроскопических характеристик тела от температуры, которые определяются возбужденными состояниями тела. Этим демонстрируется применимость формулы, которую мы назвали основной физической статистики (см. формулу на стр. 155).

Знание функции распределения магнонов по энергиям позволяет вычислить внутреннюю энергию, содержащуюся в газе магнонов — сумму энергий отдельных магнонов:

$$E_{\text{магн}} = \int_0^{\infty} \varepsilon \bar{n}(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3.43)$$

Поступая аналогично предыдущему и считая, что $\varepsilon_0 = 0$, мы легко установим, что $E_{\text{магн}} \sim T^{5/2}$. Энергия магнонов,

*) *Задача.* С помощью формулы (3.42) вычислите $M(T)$ при $\varepsilon_0 = 2\mu H \gg kT$ и сравните с формулой (3.5). Для численной оценки возьмите $H = 1000$ Э, $T_c = 10^3$ К.

естественно, стремится к нулю при стремлении к нулю температуры, но стремится, как мы скоро поймем, сравнительно медленно *). По существу, именно этим вызван наш интерес к температурной зависимости энергии магнов.

Теплоемкость тела, как известно, есть количество тепла, получаемого телом при его нагревании на 1 градус. Если объем тела не меняется, то получаемое тепло идет на увеличение его внутренней энергии, т. е. получаемое тепло равно изменению внутренней энергии тела E_T . Поэтому при фиксированном объеме (а объем твердого тела практически всегда можно считать фиксированным) теплоемкость C равна $\frac{dE_T}{dT}$. Несомненно, магны вносят вклад во внутреннюю энергию ферромагнетика. Поэтому можно говорить о магонной части теплоемкости ферромагнетика:

$$C_{\text{магн}} = \frac{dE_{\text{магн}}}{dT}. \quad (3.44)$$

Магонная теплоемкость ферромагнетика, как ясно из предыдущего, так же как намагниченность линейно зависит от $T^{3/2}$. Нелишне привести точную формулу (в расчете на 1 см³):

$$C_{\text{магн}} \approx 0,1kN \left(\frac{kT}{A} \right)^{3/2} \quad (3.45)$$

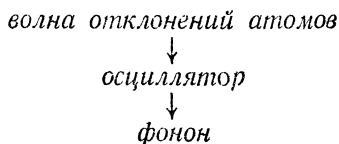
(мы опять заменили $1/a^3$ на N). Точная формула нужна вот почему. Когда речь идет о намагниченности, то за ее температурную зависимость при $T \ll T_c$ отвечают только магны. Когда же речь идет о теплоемкости — это не так. Отличая внутреннюю энергию тела от энергии магнов, мы уже как бы намекнули, в чем дело. Движение атомных частиц в твердом теле не ограничивается возбуждением спиновой системы. Существуют возбужденные состояния, при которых вовсе не изменяются положения спинов атомов. Из таких движений наиболее существенны колебания атомов (ионов) вокруг их положения равновесия. Мы расскажем о них в следующем разделе.

Фононы

Атомы колеблются во всех твердых телах, а не только в ферромагнетиках. Поэтому содержание этого раздела имеет отношение к любым твердым телам.

*) *Задача.* Найти зависимость $E_{\text{магн}}(T)$ при $kT \ll \epsilon_0$.

Между атомами твердого тела существуют, естественно, силы взаимодействия: притяжение — на больших расстояниях, отталкивание — на малых. Иначе, что бы держало атомы в виде стройной конструкции — кристалла с периодически повторяющимся расположением атомов в пространстве? Отклоним атом из положения равновесия. Силы, о которых мы говорили, заставляют вернуться его в положение равновесия, но атомы — соседи, конечно, не останутся «равнодушными». По кристаллу побежит волна отклонений атомов из положений равновесия. Простейшая (элементарная) форма таких волн — это волна с определенным волновым вектором \mathbf{k} и зависящей от \mathbf{k} частотой ω . А теперь уже привычный путь, обозначенный схемой на стр. 154:



Внизу название квазичастицы, поставленной в соответствие (соотношениями де-Бройля) волне отклонений. Она получила название *фонон*, так как волны отклонений — это обычные звуковые волны, распространяющиеся по кристаллу (*phōnē* — по-гречески звук), во всяком случае, когда длина такой волны $\lambda = 2\pi/k$ имеет макроскопические размеры, значительно большие постоянной решетки a , т. е. при $ak \ll 1$. Резюмируем:

импульс фонона (квазиимпульс) $\hbar\mathbf{k}$, энергия фонона $\varepsilon = \hbar\omega(\mathbf{k})$.

Энергия фонона, как всякой квазичастицы, существующей в периодической кристаллической решетке, — периодическая функция квазиимпульса (рис. 55, а). Однако поскольку нас будут интересовать главным образом самые низкие возбужденные состояния тела, то мы можем ограничиться той связью между частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} , которая справедлива для звука с длинной волны, большой по сравнению с постоянной решетки a :

$$\omega = c_{зв}k, \quad \text{или} \quad \hbar\omega = c_{зв}p, \quad (3.46)$$

где $c_{\text{зв}}$ — скорость звука, не зависящая (с хорошей точностью) от его частоты *). В разных твердых телах скорость звука различна. «В среднем» она равна $10^4 \div 10^5$ см/с.

В твердых телах распространяется три типа звуковых волн: две из них — поперечные, а одна продольная (как колеблются атомы в каждой из волн, ясно из рис. 55, б). У поперечных и продольных волн скорости несколько отличаются, но мы не будем этого учитывать, не забывая, однако, что есть три сорта фононов.

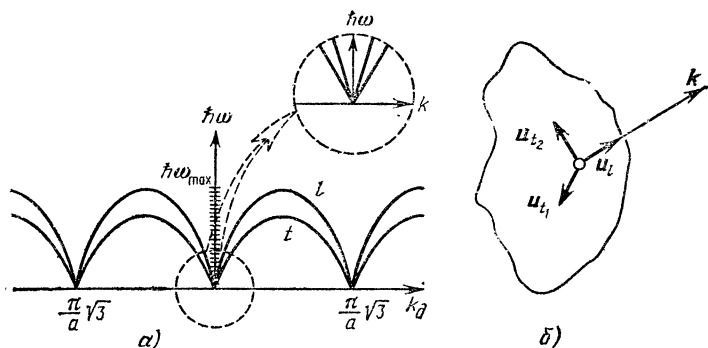


Рис. 55. а) Зависимость энергии фонона от проекции k_d волнового вектора на пространственную диагональ куба (ср. с рис. 51) для продольных (l) и поперечных (t) волн. При $k \rightarrow 0$ зависимость $\hbar\omega$ от k линейная (врезка). Область разрешенных значений энергий фонона отмечена штриховкой. б) В продольной (l) волне смещение атомов параллельно k , в поперечных (t — их две) — перпендикулярно; u — вектор смещения атома.

На том же рис. 55 изображена область разрешенных значений энергий фононов. Заметьте, она начинается от нуля — от энергии основного состояния кристалла — щели нет!

Прочитав еще раз раздел «Квантовый осциллятор», мы можем сразу сказать: число фононов с импульсом p определяется формулой (3.36) или (3.38) — только вместо $\hbar\omega$ или $\epsilon(p)$ надо подставить энергию фонона (3.46). К сожалению, мы не можем (как мы это сделали в случае магнонов) воспользоваться формулой (3.31), так как плотность состояний фононов $g_\phi(\epsilon)$ не совпадает с плот-

*) Приведем более привычную запись соотношения (3.46): $v = c_{\text{зв}}/\lambda$, где v — циклическая частота, λ — длина волны; так как $\omega = 2\pi v$, а $k = 2\pi/\lambda$, то получаем приведенные соотношения.

ностью состояний обычных частиц и магнонов. Вернувшись еще раз к выводу формулы для плотности состояний электронов (2.19) (стр. 89), легко убедиться, что для фононов $g_{\text{ф}}(\epsilon) \sim \epsilon^2$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Точная формула имеет следующий вид (мы учли три сорта фононов):

$$g_{\text{ф}}(\epsilon) = \frac{3V\epsilon^2}{2\pi^2\hbar^3c_{\text{св}}^3},$$

и, следовательно,

$$\bar{n}_{\text{ф}}(\epsilon) = \frac{3V}{2\pi^2\hbar^3c_{\text{св}}^3} \frac{\epsilon^2}{e^{\epsilon/kT} - 1}, \quad \epsilon \ll \epsilon_{\text{max}}. \quad (3.47)$$

Мы написали также условие применимости формулы. Ведь мы пользовались соотношением (3.46), а оно справедливо только для фононов с малой энергией; ϵ_{max} максимальная энергия, которую может иметь фонон. Величину $\frac{\epsilon_{\text{max}}}{k} = \Theta$ называют температурой Дебая. Как пра-

вило, она не превосходит нескольких сотен градусов Кельвина. Так, для Рb она равна 90 К, для Ag — 210 К, для KBr — 180 К, для NaCl — 280 К. Особенно велика температура Дебая у алмаза — порядка 2000 К.

Температура Дебая — важная характеристика кристалла. Если температура тела значительно больше температуры Дебая, то нет необходимости, рассматривая колебания атомов, обращаться к квантовой механике (см. ут-

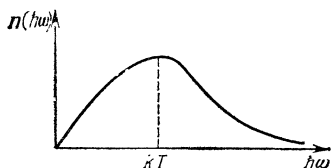


Рис. 56. Распределение фононов по энергиям. Площадь под кривой $\bar{n} = \bar{n}(\hbar\omega)$ равна полному числу фононов при температуре $kT \ll \hbar\omega_{\text{max}}$.

верждение, выделенное курсивом на стр. 157). Если же $T \lesssim \Theta$, то квантовое рассмотрение необходимо. Нас, как вы помните, интересует случай низких температур. Уточним: мы ограничимся температурной областью $T \ll \ll \Theta$. В этом случае можно не думать об ограничении в формуле (3.47) и совершенно аналогично предыдущему показать, что фононная энергия пропорциональна четвертой степени температуры ($E_{\text{ф}} \sim T^4$), а фононная теплоемкость — третьей ($C_{\text{ф}} \sim T^3$).

На рис. 56 изображена функция распределения фононов при низких температурах. Видно, что большинство фононов имеет энергию порядка kT .

Выражение для фононной теплоемкости единицы объема кристалла, в элементарной ячейке которого один атом, выпишем точно *):

$$C_{\text{ф}} \approx \frac{2\pi^2 k}{5} \left(\frac{T}{\hbar c_{\text{зв}}} \right)^3. \quad (3.48)$$

Напомним, что мы решили не различать скорости поперечных и продольных звуковых волн.

Фононы — один из основных тепловых резервуаров твердого тела. Падение теплоемкости тела с температурой —, по-видимому, первое макроскопическое явление, нашедшее объяснение путем привлечения квантовой механики (А. Эйнштейн, П. Дебай); на сегодняшнем языке — путем введения фононов.

Приглядитесь к формулам (3.45) и (3.48). Они очень похожи. Обе утверждают, что теплоемкости — и магнов, и фононов — стремятся к нулю при стремлении к нулю температуры. Но магنونная часть стремится к нулю медленнее, чем фононная: $C_{\text{ф}}/C_{\text{магн}} \sim T^{3/2} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow 0$. При достаточно низких температурах, если температура Кюри T_c больше температуры Дебая Θ , именно магновы определяют теплоемкость тела. При совсем низких температурах ($kT \ll \epsilon_0$) фононы «берут свое»: так как число магнов экспоненциально мало (см. (3.42)), то при $T \rightarrow 0$ теплоемкость ферромагнетика определяется именно фононами **). То, что здесь описано, имеет место в ферромагнетиках — неметаллах. В металлах при низких температурах важную роль играют электроны проводимости, теплоемкость которых пропорциональна первой степени температуры (это тоже квантовое свойство; его причина — вырождение электронного газа, см. гл. 2, § 4). Так как электронная теплоемкость убывает с температурой медленнее и фононной, и магنونной, то именно электроны определяют зависимость теплоемкости металла при стремлении температуры к нулю.

*) *Задача.* Вычислите фононную часть теплоемкости, воспользовавшись формулой (3.47).

**) Чуть выше мы игнорировали существование ϵ_0 .

АНТИФЕРРОМАГНЕТИЗМ

Описывая свойства парамагнетиков (гл. 2, § 1), мы отмечали, что у ряда веществ парамагнитная температура Кюри Θ_p в законе Кюри — Вейсса отрицательна, а в третьей главе, выводя закон Кюри — Вейсса для ферромагнетиков при температурах, превышающих температуру Кюри T_c , мы убедились, что Θ_p (в модели Кюри — Вейсса она совпадает с T_c) определяется обменным интегралом (см. формулу (3.11)). Естественно предположить, что отрицательный знак Θ_p у упоминавшихся веществ связан с отрицательным знаком обменного интеграла. И вообще, естественно задать вопрос, как должны вести себя при понижении температуры парамагнетики, обменное взаимодействие между атомами которых велико, но обменный интеграл имеет отрицательный знак? По-видимому, первым сформулировал такой вопрос Л. Д. Ландау (1933 г.) и показал, что в таких веществах должен происходить своеобразный магнитный фазовый переход 2-го рода, не сопровождающийся возникновением макроскопического спонтанного магнитного момента. Позже эти вещества были названы *антиферромагнетиками*. Вскоре после работы Л. Д. Ландау антиферромагнитное состояние было экспериментально открыто Л. В. Шубниковым с сотрудниками (в 1935 г.). В таблице VI помещены некоторые антиферромагнетики и

Таблица VI

Антиферромагнетик	T_N , К
NiSO_4	37
FeSO_4	21
NiO	520
FeO	188
NiF_2	73,2
FeF_2	78,3

обозначены их температуры фазового перехода T_N . В честь французского физика Л. Нееля, получившего за работы по антиферромагнетизму в 1970 г. Нобелевскую премию по физике, температуру фазового перехода в антиферромагнитное состояние называют температурой Нееля.

§ 1. Антиферромагнитное упорядочение

Как мы уже говорили, в антиферромагнетиках, как и в ферромагнетиках, основную роль играет обменное взаимодействие. Поэтому естественно обратиться к гамильтониану (3.8'), считая, однако, что $A < 0$. Отвлечемся от квантовой природы обменного взаимодействия и даже спинов, и будем считать, что $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_k$ — обычные классические векторы заданной длины, а формула

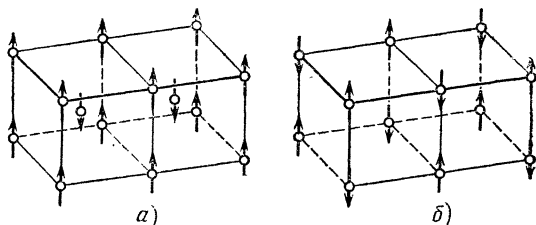


Рис. 57. Антиферромагнитное упорядочение магнитных моментов; а) в объемноцентрированной кубической решетке; б) — в простой кубической решетке.

(3.8') определяет, как энергия тела зависит от их взаимного расположения *). Именно взаимного, так как обменное взаимодействие изотропно относительно общего поворота всех спинов. Видно, что при $A < 0$ минимальное значение энергии достигается при спиновой конфигурации, в которой чередуются спины, направленные вдоль некоторого направления и противоположно ему (рис. 57). Действительно, при такой конфигурации каждое из скалярных произведений для ближайших соседних спинов будет наибольшим по абсолютной величине и отрицательным. Энергия при этом ($A < 0$) имеет наименьшее значение.

*) Как мы убедимся (см. § 3), классическая модель — необходимость, так как строгая квантовая теория антиферромагнетизма отсутствует.

Конфигурацию с чередующимися спинами можно рассматривать как две ферромагнитные решетки, вставленные друг в друга. Их обычно называют *магнитными подрешетками*. Они связаны друг с другом отрицательным обменным взаимодействием. На рис. 57 изображена простейшая антиферромагнитная структура. Существуют и более сложные. Одна из них — структура UO_2 — изображена на рис. 58. Если ее описывать в терминах подрешеток, то необходимо ввести четыре подрешетки. Хотя в дальнейшем мы ограничимся только антиферромагнетиками с двумя подрешетками, заметим, что в настоящее время открыты и исследуются разнообразные и иногда очень вычурные магнитные структуры. Например, у редкоземельных металлов в соседних атомных плоскостях спины повернуты

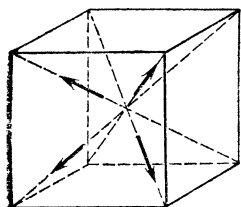


Рис. 58. Магнитная структура соединения UO_2 , описываемая четырьмя магнитными подрешетками. Спины магнитных атомов направлены по диагоналям куба.

магнитные структуры. Например, у редкоземельных металлов в соседних атомных плоскостях спины повернуты

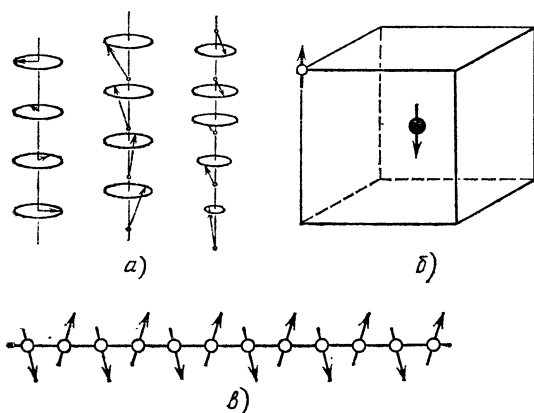


Рис. 59. Сложные магнитные структуры: а) спиральные структуры; б) магнитная структура феррита: магнитный момент в вершине куба меньше магнитного момента атома в центре куба; в) магнитная структура слабого ферромагнетика.

ты друг относительно друга на некоторый угол. Магнитная структура представляет собой спираль (рис. 59, а).

Кроме того, существует большой класс вещества, который как бы объединяет в себе свойства ферромагнетиков и антиферромагнетиков. Их называют *ферримagnетиками*, или *ферритами*. Это — вещества, магнитную систему которых можно представить себе как систему нескольких подрешеток, однако, не компенсирующих друг друга (например, за счет того, что намагниченность одной в несколько раз больше другой; рис. 59, б). Важным случаем ферритов служат слабые ферромагнетики — антиферромагнетики в которых угол между магнитными моментами подрешеток немного отличается от 180° (рис. 59, в).

Из рис. 57 ясно видно, что макроскопический магнитный момент антиферромагнетика равен нулю. Но это означает, что антиферромагнитное состояние не может проявить себя так, как проявляет себя ферромагнитное, — появлением магнитного поля вокруг образца. Можно ли вообще «увидеть» антиферромагнитную структуру? Для ответа на этот вопрос надо вспомнить, как вообще «видят» кристаллические структуры?

Не только увидеть правильное расположение атомов, но и измерить расстояния между ними можно с помощью рентгеновских лучей. В основе рентгеноструктурного анализа лежит интерференция, проявляющаяся в данном случае в том, что амплитуда электромагнитных волн, отраженных тождественными атомными плоскостями, велика тогда, когда разность оптического хода лучей равна или кратна длине волны рентгеновского излучения. Если промоделировать кристалл стопкой параллельных плоскостей (рис. 60), то легко вывести условие, показывающее, для каких направлений должны соблюдаться интерференционные условия. Это условие получило название условия Брэгга — Вульфа. Оно таково:

$$n \frac{\lambda}{2a} = \cos \vartheta, \quad (4.1)$$

где n — целые числа, λ — длина волны рентгеновских лучей, a — расстояние между атомными плоскостями, ϑ — угол падения лучей, равный углу отражения. Если длина волны λ больше удвоенного межатомного расстояния a , интерференция вовсе невозможна (именно поэтому приходится использовать рентгеновские лучи, длина волны которых несколько ангстрем). Если $\lambda < 2a$, то может наблюдаться несколько максимумов, число кото-

рых определяется условием $\cos \vartheta < 1$. Рис. 60, б, на котором чередующиеся плоскости отмечены стрелками, направленными в разные стороны, изображает тот же «кристалл», что и на рис. 60, а, но в антиферромагнитном состоянии. Казалось бы, интерференционная картина в этом случае будет такой же, как у кристалла с удвоенным межатомным расстоянием: при той же длине волны по-

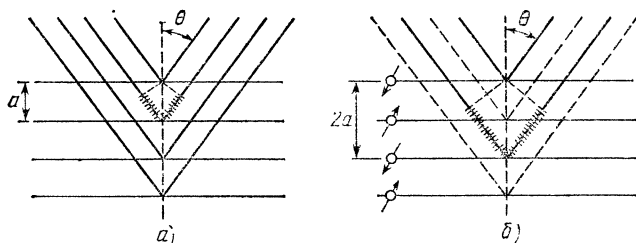


Рис. 60. Интерференционное условие Брэгга—Вульфа. Разность оптического хода лучей, отраженных от двух соседних эквивалентных атомных плоскостей (она отмечена на чертеже штриховкой), должна равняться целому числу длин волн света: а) обычный кристалл; б) антиферромагнетик (расстояние между эквивалентными атомными плоскостями равно $2a$).

явятся дополнительные максимумы. Казалось бы ... Но это не так. Рентгеновские лучи «ощущают» только распределение электрического заряда. Для них атомы с разным направлением магнитного момента неотличимы. Поэтому

рентгеноструктурный анализ не фиксирует магнитной структуры кристалла.

Может быть, воспользоваться электронами? Благодаря квантовым волновым свойствам, они тоже интерферируют и могут служить для определения кристаллических структур (их длина волны согласно соотношению де-Бройля, равна $2\pi\hbar/p$, где p — импульс). Кроме того, электроны имеют магнитный момент и поэтому по-разному взаимодействуют с атомами, магнитные моменты которых различны. И все же, если бы мы поставили эксперимент по рассеянию электронов антиферромагнетиком, мы, скорее всего, не получили бы желаемого эффекта. Дело в том, что электрические силы взаимодействия в $(137)^2$ раз больше, чем силы взаимодействия между магнитными моментами. Мы об этом говорили

в первой главе, когда рассказывали о строении атома (§ 9). Из-за этого одинаковые атомы с противоположно направленными магнитными моментами будут рассеивать почти одинаково — усмотреть отличие практически невозможно. Вот, если бы существовали микроскопические частицы с магнитным моментом, но без заряда, тогда другое дело!

Но такие частицы есть. Это — нейтроны. Магнитный момент у них, правда, мал (см. табл. I на стр. 43), но зато нет заряда. С помощью нейтронов, рассеивающихся именно благодаря взаимодействию с магнитными моментами атомов, действительно можно выяснить, как расположены магнитные моменты в кристаллах антиферромагнетика *). Итак,

упругое рассеяние нейтронов — метод исследования магнитных структур.

Мы подчеркнули: речь идет об упругом рассеянии, т. е. о таком, при котором, рассеиваясь, нейтрон не изменяет своей энергии (см. ниже).

Хотя и в парамагнитном и в антиферромагнитном состояниях магнитный момент тела равен нулю, их магнитные характеристики, конечно, существенно отличаются. При высоких температурах магнитная восприимчивость подчиняется закону Кюри — Вейсса, в точке Нееля она имеет максимум; при дальнейшем понижении температуры магнитная восприимчивость падает. Если проводить измерения на монокристаллах, то можно выявить различие в поведении продольной χ_{\parallel} и поперечной χ_{\perp} восприимчивостей (рис. 61). При измерении продольной восприимчивости магнитное поле направлено вдоль выстроенных магнитных моментов, а при измерении поперечной — перпендикулярно им.

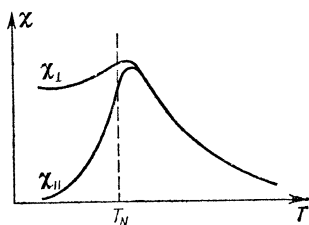


Рис. 61. Зависимость поперечной χ_{\perp} и продольной χ_{\parallel} восприимчивостей антиферромагнетика от температуры (T_N — температура Нееля).

*) *Задача.* Оценить (приблизительно), какую энергию должны иметь нейтроны, чтобы их можно было использовать для анализа структур кристаллов.

Переход через точку Нееля сопровождается скачком теплоемкости антиферромагнетика (рис. 62) — эффект, характерный для фазовых переходов 2-го рода.

Как всегда (см. гл. 3, § 3), фазовый переход 2-го рода есть переход от «беспорядка» к «порядку». В данном случае беспорядок проявляется в том, что все узлы кри-

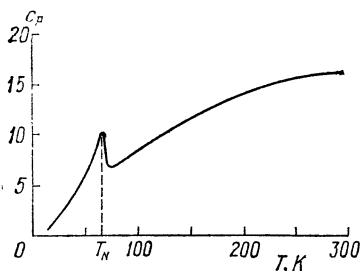


Рис. 62. Зависимость теплоемкости антиферромагнетика MnF_2 от температуры.

сталлической решетки (конечно, в которых расположены магнитные атомы) абсолютно тождественны, причем в каждом узле среднее значение магнитного момента равно нулю. Начиная с точки Нееля (при $T \leq T_N$), возникает «порядок» — узлы начинают различаться: в одних средний магнитный момент «смотрит» в одну

сторону, в других — в противоположную. Плавность перехода (ведь это фазовый переход 2-го рода!) обеспечивается тем, что в точке Нееля величина среднего магнитного момента в узле равна нулю, растет с понижением температуры и достигает максимально возможного значения при $T = 0$. Такое поведение с температурой придает больше физического смысла утверждению на стр. 168 о том, что антиферромагнетик представляет собой две вложенные друг в друга ферромагнитные подрешетки *).

§ 2. Магнитное поле изменяет структуру антиферромагнетика

В ферромагнетике при температуре, низкой по сравнению с температурой Кюри, роль постоянного и однородного магнитного поля невелика: оно поворачивает магнитный момент и борется с магнитным беспорядком, осуществляя то, что получило название парапроцесса (см. стр. 131). В антиферромагнетике роль магнит-

*) В § 3 гл. 3 мы описали, как происходит упорядочение в сплаве CuZn . Видно, что антиферромагнитное упорядочение очень напоминает упорядочение сплава. «Компонентами сплава» служат атомы с различным направлением магнитных моментов.

ного поля интереснее. Увеличение его может изменить магнитную структуру антиферромагнетика: магнитное поле может быть причиной *магнитных фазовых переходов*. Именно об этом мы и расскажем в настоящем параграфе.

Будем исходить из предположения, что магнитное поле существенно для ориентации магнитных моментов подрешеток, но не изменяет их длины. Это предположение, хорошо выполняющееся в широких интервалах значений параметров (температуры, констант анизотропии,

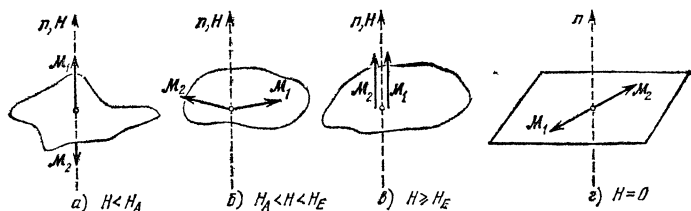


Рис. 63. Равновесное направление магнитных моментов антиферромагнетика: а), б), в) антиферромагнетик типа «легкая ось», г) антиферромагнетик типа «легкая плоскость».

обмена и т. д.), служит теоретической основой исследований *ориентационных переходов* в магнетиках. С другой стороны, оно (предположение) столь упрощает задачу, что допускает ее почти полное решение даже на страницах нашей книжки.

Итак, нам предстоит выяснить, как магнитное поле H влияет на магнитную структуру антиферромагнетика, в котором магнитные моменты подрешеток M_1 и M_2 в отсутствие магнитного поля антипараллельны:

$$M_1 = -M_2 = M, \quad (4.2)$$

и расположены вдоль оси анизотропии n . Такие антиферромагнетики называют антиферромагнетиками типа «легкая ось» (рис. 63, а). Для дополнительного упрощения будем считать, что магнитное поле также приложено вдоль оси анизотропии, т. е. вдоль «легкой оси» (продольное поле).

Выяснить структуру — это значит найти направление магнитных моментов, при которых их энергия минимальна. Для записи энергии антиферромагнетика будем исходить из соображений, аналогичных тем, которые

использовались при анализе модели Кюри — Вейсса (см. формулы (3.10) и (3.14)), считая, что энергия полностью определяется величиной и направлением магнитных моментов подрешеток (в расчете на единицу объема). Опуская слагаемые, не зависящие от направления векторов \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 , имеем

$$\mathcal{E} = \delta \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 - \frac{1}{2} \beta [(\mathcal{M}_1 n)^2 + (\mathcal{M}_2 n)^2] - (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) H. \quad (4.3)$$

Каждое из трех слагаемых описывает «разные» энергии: первое — обменную (константа обменного взаимодействия, пропорциональная обменному интегралу, обозначена греческой буквой δ , при $\delta > 0$ магнитным моментам, естественно, выгодно быть антипараллельными); второе слагаемое — энергию анизотропии (β — константа анизотропии, для антиферромагнетиков типа «легкая ось» $\beta > 0$ и магнитные моменты располагаются вдоль оси анизотропии n^*)), третье — магнитную энергию, энергию взаимодействия магнитных моментов с магнитным полем H (когда магнитные моменты \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 антипараллельны друг другу, магнитная энергия равна нулю).

Приоритет изотропного обменного взаимодействия над анизотропным проявляется в том, что $\delta \gg \beta$. Обе константы имеют нулевую размерность, так как \mathcal{E} — это плотность энергии. По порядку величины $\delta \approx |A|/\mu \mathcal{M}_0$; $\beta \approx 1, \mu$, как всегда, магнетон Бора, а \mathcal{M}_0 — здесь величина намагниченности подрешетки вдали от температуры Нееля T_N , которая, как и в ферромагнетиках, определяется обменным интегралом ($kT_N \approx |A|$). Оценка параметров δ и β совпадает с оценкой параметров α и β в случае ферромагнетика (см. стр. 110 и 119). Подчеркнем: в антиферромагнетике направление магнитных моментов определяется не только релятивистским анизотропным взаимодействием, но и изотропным обменным, которое «старается» ориентировать моменты подрешетки антипараллельно.

*) Антиферромагнетики, у которых $\beta < 0$, называются антиферромагнетиками типа «легкая плоскость», так как моменты \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 при $H = 0$ лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору n (рис. 63, e). Запись энергии анизотропии мы чуть-чуть упростили, опустив слагаемое $\beta' (\mathcal{M}_1 n)(\mathcal{M}_2 n)$. Оно, не слишком меняя результаты, делает их менее наглядными.

Можно убедиться, что несимметричное расположение магнитных моментов относительно оси анизотропии n энергетически невыгодно *). Поэтому мы рассмотрим только три конфигурации, изображенные на рис. 63, а, б и в, и устроим между ними «соревнование». Выпишем прежде всего энергии этих конфигураций:

$$\mathcal{E}_{\parallel} = -(\delta + \beta) \mathcal{M}^2; \quad (4.4)$$

$$\mathcal{E}_{\text{кос}} = \delta \mathcal{M}^2 \cos 2\vartheta - \beta \mathcal{M}^2 \cos^2 \vartheta - 2\mathcal{M}H \cos \vartheta; \quad (4.5)$$

$$\mathcal{E}_{\perp} = \delta \mathcal{M}^2 - \beta \mathcal{M}^2 - 2\mathcal{M}H. \quad (4.6)$$

Какая формула относится к какой конфигурации, ясно из принятых обозначений. Формулы (4.4) и (4.6) «окончательные», а формулой (4.5) надо воспользоваться для того, чтобы найти угол ϑ , минимизирующий энергию $\mathcal{E}_{\text{кос}}$. Это задача на отыскание минимума:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_{\text{кос}}}{d\vartheta} &\equiv 2\mathcal{M}^2 \sin \vartheta \left[-(\delta - \beta) \cos \vartheta + \frac{H}{\mathcal{M}} \right] = 0, \\ \frac{d^2\mathcal{E}_{\text{кос}}}{d\vartheta^2} &\equiv -4\delta \mathcal{M}^2 \cos 2\vartheta + 4\beta \mathcal{M}^2 \cos 2\vartheta + \\ &\quad + 2\mathcal{M}H \cos \vartheta > 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Согласно выражениям (4.7) энергия экстремальна либо при

$$\cos \vartheta = \frac{H}{H_E}, \quad H_E = (2\delta - \beta) \mathcal{M}, \quad (4.8)$$

либо при

$$\sin \vartheta = 0. \quad (4.9)$$

Так как $\cos \vartheta < 1$, то первое решение имеет смысл, если $H < H_E$. При больших полях есть только одно решение (4.9), когда оба магнитных момента *параллельны* друг другу. Из выражения для второй производной видно, что структура $\uparrow\uparrow$ при $H > H_E$ соответствует минимуму энергии: магнитное поле «переборол» обменное взаимодействие, заставив оба магнитных момента «лечь» по полю. Решение (4.8) минимизирует энергию (4.5), если магнитное поле меньше H_E . Энергия $\mathcal{E}_{\text{кос}}$ при этом принимает следующее значение:

$$\mathcal{E}_{\text{кос}} = -\mathcal{M}^2 \delta - \frac{H^2}{2\delta - \beta}. \quad (4.5')$$

*) *Задача.* Докажите (лучше всего, не прибегая к расчетам), что несимметричное расположение магнитных моментов \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 при $H = Hn$ энергетически невыгодно,

Сравнивая энергию $\mathcal{E}_{\text{кос}}$ с энергией при антипараллельной конфигурации $\mathcal{E}_{\uparrow\downarrow}$, мы убеждаемся, что при $H = H_A = \mathcal{M} \sqrt{\beta(2\delta - \beta)}$ они сравниваются, при $H < H_A$ конфигурация $\uparrow\downarrow$ имеет меньшую энергию, а при $H > H_A$ энергетически выгоднее конфигурация «кос» с магнитными моментами, почти перпендикулярными к оси анизотропии *), т. е. $\mathcal{E}_{\text{кос}} < \mathcal{E}_{\uparrow\downarrow}$. Знание зависимости энергии от магнитного поля позволяет вычислить магнитный момент — в данном случае магнитный момент антиферромагнетика, который мы обозначим \mathfrak{M} . Он направлен, как и магнитное поле, вдоль оси анизотропии. Так как в «кос»-фазе $\mathfrak{M}_{\text{кос}} = -\frac{d\mathcal{E}_{\text{кос}}}{dH}$, то

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\uparrow\downarrow} &= 0 & \text{при } H \leq H_A, \\ \mathfrak{M}_{\text{кос}} &= \frac{H}{\delta - \frac{\beta}{2}} & \text{при } H_A \leq H \leq H_E, \\ \mathfrak{M}_{\uparrow\downarrow} &= 2\mathcal{M} & \text{при } H > H_E. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Зависимость магнитного момента от магнитного поля показана на рис. 64. Видно, что антиферромагнетик

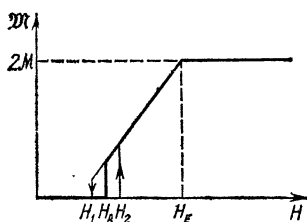


Рис. 64. Зависимость магнитного момента антиферромагнетика типа «легкая ось» от магнитного поля, приложенного вдоль избранной оси. Петля гистерезиса (тонкая линия) отражает существование метастабильных состояний в интервале полей (H_1, H_2) .

дважды испытывает превращения: при $H = H_A$ происходит скачкообразная переориентация магнитных моментов путем фазового перехода 1-го рода (поле H_A так и называют — *полем переориентации*). При $H = H_E$ переориентация заканчивается, так как обращается в нуль угол между магнитными моментами подрешеток, магнитные моменты «схлопываются». Это — фазовый переход 2-го рода: магнитный момент непрерывен, но скачком меняется магнитная восприимчивость. При $H < H_A$

*) Так как $\beta \ll \delta$, то при $H = H_A$ угол $\vartheta \approx \pi/2$. Действительно,

$$\cos \vartheta = \sqrt{\frac{\beta}{2\delta - \beta}} \ll 1.$$

фаза «кос» метастабильна, а при $H > H_A$ метастабильна фаза $\uparrow\downarrow$. Существование метастабильных состояний приводит к гистерезису. Ширина петли гистерезиса (она изображена на рис. 64 тонкой линией) определяется теми значениями полей, при которых фазы теряют устойчивость (поля неустойчивости): фаза $\uparrow\downarrow$ устойчива, пока магнитное поле не достигает значения $H_2 = \sqrt{\beta(2\delta + \beta)}\mathcal{M}$, а фаза «кос» — до тех пор, пока $H > H_1 = H_2 \frac{2\delta - \beta}{2\delta + \beta}$. Легко проверить, что

$$H_1 < H_A < H_2.$$

Так как $\beta \ll \delta$, то петля гистерезиса очень узка по сравнению с полем переориентации:

$$H_2 - H_1 = H_A \frac{2\beta}{\sqrt{(2\delta)^2 - \beta^2}} \approx H_A \frac{\beta}{\delta} \ll H_A.$$

К сожалению, ограничиваясь симметричными конфигурациями, нельзя вычислить поля неустойчивости H_1 и H_2 . Для этого нужно было бы выяснить, как зависит энергия от направлений магнитных моментов \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 , когда они расположены несимметрично.

Поле «схлопывания» магнитных моментов H_E у большинства антиферромагнетиков очень велико (оно пропорционально обменной константе δ , см. (4.8)). Однако существуют вещества с аномально малым обменным взаимодействием (например, $\text{MnBr}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, $\text{MnCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$). Они переходят в антиферромагнитное состояние при температурах около 2 К. В таких веществах удается наблюдать не только переориентацию магнитных моментов (фазовый переход 1-го рода при $H = H_A$), но и «схлопывание» (фазовый переход 2-го рода при $H = H_E$), при котором антиферромагнетик «превращается» в ферромагнетик.

Конечно, рис. 64 схематичен, так как не отражает «борьбы» магнитного поля с температурным беспорядком (выше это действие магнитного поля мы назвали парапроцессом). Эта «борьба» проявляется особенно ярко, когда магнитное поле велико ($H \lesssim H_E$). Учет парапроцесса приводит к тому, что при $H > H_E$ магнитный момент немного возрастает с ростом магнитного поля, а при $H < H_A$ магнитный момент, хотя и мал, но все же не равен нулю (во всяком случае при $T \neq 0$).

§ 3. Спиновые волны — магноны в антиферромагнетике

Температурную зависимость магнитных моментов подрешеток вблизи точки Нееля T_N можно выяснить, воспользовавшись моделью самосогласованного поля (см. стр. 102) — обобщением модели Кюри — Вейсса на случай двух подрешеток. Однако, как мы уже знаем, при низких температурах (при $T \ll T_N$) эта модель «не работает» — приводит к существенным ошибкам. Получить правильный результат можно, только зная, как движутся атомные магнитные моменты, т. е. зная энергетический спектр антиферромагнетика.

Возбужденные состояния антиферромагнетика можно рассматривать подобно тому, как это делалось для ферромагнетика: начать с состояния, в котором спин отдельного атома отклонен от своего «правильного» положения, прийти к выводу, что это состояние нестационарно, «сконструировать» спиновую волну и т. д. (гл. 3, § 7). Но, с другой стороны, мы знаем, что при низких температурах наибольший интерес представляют спиновые волны с длиной волны, большой по сравнению с межатомным расстоянием. А такие волны можно, как мы видели, трактовать как неоднородную прецессию намагниченности (гл. 3, § 8). В случае антиферромагнетика с двумя подрешетками намагниченностей тоже две: \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 . Каждый магнитный момент прецессирует вокруг своего положения равновесия, однако из-за обменного взаимодействия эти прецессии не независимы.

Мы начнем, как и в случае ферромагнетика, с обсуждения однородной прецессии, причем опишем ее для трех рассмотренных выше конфигураций: $\uparrow\downarrow$, «кос» и $\uparrow\uparrow$. К сожалению, нам придется ограничиться именно описанием. Вывод соответствующих формул требует чуть более высокого уровня знания математики, чем тот, на который мы рассчитываем. Физика же проста: на каждый из магнитных моментов действует эффективное поле, зависящее от «другого» момента. Именно поэтому прецессии не независимы.

Конфигурация $\uparrow\downarrow$ ($H < H_A$). Движение двух магнитных моментов раскладывается на сумму двух независимых периодических движений. В каждом из них принимают участие оба момента. Частоты этих движений (прецессий) обозначим ω_+ и ω_- . Анализ показывает,

что

$$\omega_{\pm} = \gamma(H_2 \pm H), \quad H_2 = \sqrt{\beta(2\delta + \beta)} \mathcal{M}, \quad (4.11)$$

γ — гиромагнитное отношение (см. стр. 38).

На рис. 65, а показано, как прецессируют магнитные моменты подрешетки в каждом из двух движений. В том движении, частота которого ω_+ , момент, направленный по полю (на рисунке \mathcal{M}_1) отклонен от оси чуть больше другого (\mathcal{M}_2), направленного против поля; в движении, частота которого ω_- , наоборот. Обратите внимание:

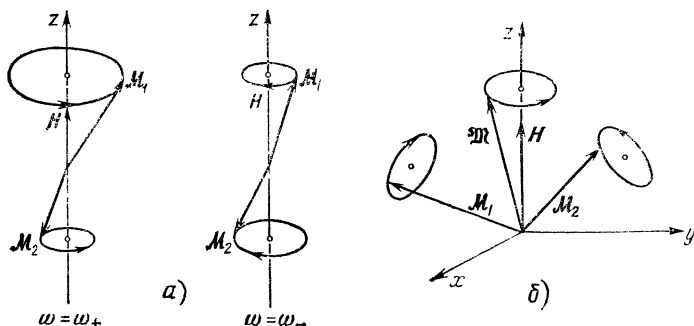


Рис. 65. Прецессия магнитных моментов подрешеток антиферромагнетика типа «легкая ось» (магнитное поле направлено по оси анизотропии): а) $H < H_A$; б) $H_A < H < H_E$.

при $H = H_2$ частота прецессии обращается в нуль, что служит признаком неустойчивости.

Конфигурация «кос» ($H_A < H < H_E$). Поворот магнитных моментов (без изменения угла между ними) вокруг магнитного поля, параллельного избранной оси, не изменяет состояния антиферромагнетика — оно вырождено относительно положения плоскости, в которой магнитные моменты расположены. Поэтому частота, связанная с этим движением, равна нулю. Это может вызвать недоумение. Казалось бы, такая система из магнитных моментов может вращаться с любой частотой, а оказывается, она, эта частота, равна нулю.

Привлечение квантовомеханических представлений делает утверждение более понятным. Предположим, что частота осцилляций системы магнитных моментов без изменения угла между ними отлична от нуля и равна Ω . Тогда с этим движением связаны уровни энергии $\hbar\Omega(n + 1/2)$. Но ведь поворот плоскости, в которой лежат

магнитные моменты, не изменяет энергии системы. Значит, $\Omega = 0$. Надеемся, что теперь нареканий не будет.

Прецессия магнитных моментов в движении с отличной от нуля частотой показана на рис. 65, б. На нем же изображена прецессия суммарного магнитного момента $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$. Частота этого движения растет с ростом магнитного поля H . При $H = H_1$ она равна нулю, свидетельствуя о неустойчивости конфигурации «кос», а при $H = H_E$ совпадает с частотой прецессии ферромагнетика с магнитным моментом, равным $2\mathcal{M}$, как и должно быть в ферромагнитной конфигурации $\uparrow\uparrow$.

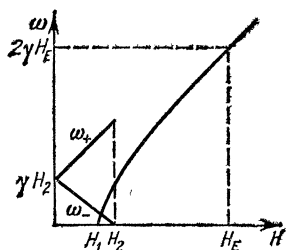


Рис. 66. Зависимость от магнитного поля частот прецессии антиферромагнетика типа «легкая плоскость». Магнитное поле параллельно оси анизотропии.

Рис. 66 изображает описанную выше зависимость частот однородной прецессии от магнитного поля H .

Дальнейший путь рассуждения, естественно, совпадает с тем, который мы «прошли» в § 8, гл. 3. Переход от однородной прецессии к неоднородной приводит к зависимости частоты прецессии от волнового вектора \mathbf{k} .

А потом опять по знакомой схеме:

волна → осциллятор → квазичастица.

Квазичастицы, как и в ферромагнетике, называют магнонами (реже — антиферромагнонами). Естественно, при переходе от волны к квазичастице мы воспользовались соотношениями де-Бройля: импульс магнона равен $\hbar\mathbf{k}$, а его энергия равна $\hbar\omega$. При $H < H_A$ (здесь мы ограничиваемся этим случаем) в антиферромагнетике с двумя подрешетками существуют два типа магнонов. Зависимость их энергии от импульса несколько сложнее, чем у магнонов ферромагнетика. Когда импульс мал, то

$$\epsilon^{\pm}(\mathbf{p}) = 2\mu [H_2^2 + (H'_E a k)^2]^{1/2} \pm 2\mu H, \quad (4.12)$$

где $2\mu = \hbar\gamma$; a — постоянная кристаллической решетки. Коэффициент при k^2 написан так, чтобы был ясен его порядок величины ($H'_E \approx H_E \gg H_2$) и его происхождение — он обусловлен обменным взаимодей-

нием. Заметим, что существование слагаемых $\pm 2\mu H$ в выражениях (4.12) не дает права интерпретировать ϵ^+ и ϵ^- как энергии двух из трех состояний одной частицы со спином 1 (ср. стр. 142). Эти слагаемые относятся к разным магнонам. *Каждый из магнонов антиферромагнетика — квазичастица со спином 1*, но из трех возможных спиновых состояний осуществляются только по одному для каждого магнона (у одного $s_z = -1$, а у другого $s_z = +1$). Так же как магныны в ферромагнетике,

магныны в антиферромагнетике — бозоны.

Формула (4.12) показывает, как устроен энергетический спектр антиферромагнетиков. Первые возбужденные состояния отделены щелью от основного. При $H = 0$ эта щель велика (во всяком случае в сравнении с ферромагнетиком), так как зависит не только от константы анизотропии β , но и от большой обменной константы δ (см. (4.11)). Правда, при $H = H_2$ щель обращается в нуль, но «раньше» (при $H < H_2$) антиферромагнетик типа «легкая ось» перестроится — см. предыдущий параграф.

Знание зависимости энергии магнонов от их импульсов и статистических свойств магнонов (того, что они — бозоны) позволяет рассчитать температурную зависимость суммарного магнитного момента и теплоемкости. Ясно, что при стремлении температуры к абсолютному нулю числа магнонов будут стремиться к нулю экспоненциально (щель!), что, естественно, отразится на температурной зависимости характеристик антиферромагнетика. Мы не имеем возможности сколько-нибудь подробно на этом останавливаться, в частности, и потому, что теоретические предсказания, высказанные на основании представлений о магнонах, не находят в случае антиферромагнетиков столь успешного экспериментального подтверждения, как в случае ферромагнетиков. Причина именно в большой величине щели: вклад магнонов слишком мал, чтобы его можно было надежно обнаружить.

Сравнивая магныны в ферро- и антиферромагнетиках, отметим одну любопытную особенность. Пренебрежение анизотропными силами и взаимодействием магнона с магнитным полем делает магнон в ферромагнетике очень похожим на обычную частицу с массой, равной $m^* = \hbar^2/2Aa^2$ (см. формулу (3.25)). Проведем такую же операцию с магноном в антиферромагнетике. В формуле (4.12) положим $H = 0$ и «выключим» анизотропные силы

(т. е. устремим H_2 к нулю). При этом зависимость энергии магнона от импульса очень упрощается:

$$\epsilon^\pm(p) = c^* p; \quad c^* = \frac{2\mu H'_E a}{\hbar}. \quad (4.13)$$

Она похожа на зависимость от импульса энергии фонона. Скорость магнона c^* определяется обменным взаимодействием. Формула (4.13) применима не для всех значений импульсов, ее применимость ограничена условием

$$\frac{H_2}{H'_E} \ll \frac{ap}{\hbar} \ll 1. \quad (4.13')$$

Однако, если $H_2 \ll H_E$, существует область температур ($2\mu H_2 \ll kT \ll 2\mu H'_E$), в которой «квазифононной» формулой (4.13) можно пользоваться. При таких температурах вклад магнонов в термодинамические величины антиферромагнетиков очень похож на вклад фононов. Например, магنونная теплоемкость в этих условиях пропорциональна T^3 , как и фононная (см. стр. 165).

Антиферромагнетики и их свойства мы старались описать, почти не прибегая к квантовой механике. А на стр. 167 (в примечании) прямо сказали, что строгая квантовомеханическая теория отсутствует.

Дело в том, что состояние с антипараллельными спинами в разных подрешетках в действительности не есть стационарное состояние антиферромагнетика, описываемого гейзенберговским гамильтонианом (3.8) или (3.8'). Что это так, проще всего понять, рассматривая систему спинов с $s = 1/2$. Пусть в некотором узле кристаллической решетки спин направлен вверх. Тогда в соседних с ним узлах, принадлежащих другой подрешетке, спины направлены вниз — в исследуемом нами состоянии. По самому смыслу обменного взаимодействия его роль в случае $s = 1/2$ сводится к перестановке электронов в соседних узлах. При такой перестановке чередование атомов со спинами вверх и вниз нарушится: появятся пары соседних атомов с одинаково направленными спинами — состояние изменится. Но волновая функция стационарного состояния при такой перестановке не должна измениться, она может только умножиться на некоторое число — значение энергии в стационарном состоянии. Значит, если рассмотренное нами состояние не стационарное, то настоящее основное состояние должно быть каким-то другим. Это — абсолютно правильное утверж-

дение (оно столь же правильно, сколь тривиально!). Вопрос в том, каково основное состояние? Какая у него волновая функция? Какая энергия? Ответа на эти вопросы до сих пор нет. Никому еще не удалось найти основное состояние *трехмерного* антиферромагнетика. Для одномерного антиферромагнетика, в котором взаимодействие происходит вдоль линии *), еще в 1931 г. Г. Бете нашел (вычислил) энергию основного состояния. Она, конечно, отличается от «классической» энергии двух подрешеток с противоположно ориентированными спинами. Однако обобщить этот результат на двумерный и трехмерный случаи пока не удалось.

Результат Бете относится к системе из атомов со спинами $s = 1/2$. Чем s больше, тем меньше должны отличаться результаты классического расчета (точнее, полуклассического, так как само взаимодействие — квантовый эффект) и точного квантового. При $s \gg 1$ пространственное квантование спинов перестает играть роль, спин становится классическим моментом, изменяющимся только по направлению. Строго говоря, описанные выше результаты справедливы именно для системы, состоящей из «классических» спинов. Чтобы не закончить на столь грустной ноте, отметим, что эклектичность теории антиферромагнетиков при низких температурах (полуклассический характер основного состояния и квантовомеханический подход при исследовании энергетического спектра) не мешает попыткам (и часто весьма успешным!) объяснять и трактовать широкий набор экспериментальных фактов: термодинамических, кинетических, высокочастотных, в частности, оптических. Истинное «устройство» антиферромагнетиков, по-видимому, близко к описанному. Это замечание не должно умалять важности построения строгой теории.

§ 4. Как «увидеть» отдельный магнон?

Мы надеемся, что прочитав о магнонах в ферро- и антиферромагнетиках, вы прониклись уважением к этим квазичастицам. Знание их свойств (в частности, зависимости энергии магнона от его квазимпульса) дает возможность рассчитать свойства магнети-

*) В настоящее время одно- и двумерные системы привлекают пристальное внимание физиков,

ков, сравнить наши теоретические построения с данными опыта. Но можно поступать и иначе: из данных опыта, воспользовавшись, конечно, некоторыми общими предположениями об энергетическом спектре, попытаться выяснить, что из себя представляют магноны. Составим такую логическую схему. Из опыта известно, что у ферромагнетиков отклонение $\Delta \mathcal{M}$ спонтанного магнитного момента от его значения при $T = 0$ пропорционально $T^{3/2}$ (ср. с формулой (3.40)). Отклонение $\Delta \mathcal{M}$ магнитного момента \mathcal{M} от насыщения связано с существованием магнонов. Магноны — бозоны. Отсюда, согласно законам статистики, следует, что энергия магнона пропорциональна квадрату импульса. Более того, коэффициент пропорциональности между $\Delta \mathcal{M}$ и $T^{3/2}$ позволяет вычислить эффективную массу магнона *).

Метод изучения квазичастиц (не только магнонов) по температурным зависимостям термодинамических величин очень распространен. Был даже сформулирован математический прием, позволяющий по температурной зависимости теплоемкости тела восстановить плотность числа квазичастиц — бозонов в широком диапазоне энергий. Но физик всегда мечтает изолировать объект исследования. Изучая электроны, лучше иметь дело с одним электроном, изучая магноны — с одним магноном.

Прикинем (оценим по порядку величины), сколько магнонов «обеспечивает» отклонение магнитного момента от насыщения на 1 %. Согласно формуле (3.39)

$$\frac{\Delta \mathcal{M}}{\mathcal{M}} = \frac{N_{\text{магн}}}{N},$$

т. е. $N_{\text{магн}}/N = 10^{-2}$. Следовательно, $N_{\text{магн}} = 10^{-2} N \approx \approx 10^{20}$ (!) в кубическом сантиметре. В каком-то смысле их мало, по сравнению с числом магнитных атомов, но в абсолютном смысле (по сравнению с единицей) их макроскопически много. Можно, конечно, понизить температуру (напомним: $N_{\text{магн}} \sim T^{3/2}$). Число магнонов уменьшится, но все равно останется большим, макроскопическим. Это хорошо, иначе мы не могли бы использовать формулы, выведенные для бозе-газа — для системы из макроскопического числа бозе-частиц. В этом смысле хорошо, но не оставляет надежды путем понижения тем-

*) *Задача.* Проверьте, что формула (3.40) не противоречит определению эффективной массы магнона, данной на стр. 142.

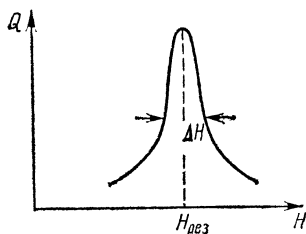
пературы изолировать отдельный магнон. Для исследования отдельных магнонов применяются совершенно другие методы и приемы, основанные на резонансном взаимодействии проникающего излучения с магнонами.

Термин «проникающее излучение» довольно условен: «нечто», что может на достаточную глубину проникнуть в исследуемое тело (например, электромагнитная или звуковая волны, нейтрон). А принципиальные черты методов станут понятными после нескольких примеров.

Ферромагнитный резонанс

Когда мы описывали ЭПР (стр. 77), то обсуждали возможность резонансного взаимодействия электромагнитной волны с прецессирующим магнитным моментом. Но ведь прецессировать может не только магнитный момент атома, но и средний магнитный момент тела, если он у него есть, конечно. У ферромагнетика магнитный момент есть, и он может прецессировать (см. § 8, гл. 3). Следовательно, если частота электромагнитной волны совпадает с частотой прецессии, то должен наступить резонанс, который будет обнаружен по резкому

Рис. 67. Зависимость поглощаемой ферромагнетиком энергии от постоянного магнитного поля имеет резонансный характер, ΔH — ширина резонансной кривой.



возрастанию поглощенной ферромагнетиком электромагнитной энергии (рис. 67). Как правило, эксперимент ставится так, что частота электромагнитной волны (речь идет о волнах радиочастотного диапазона) в ходе опыта не меняется, а меняется приложенное к магнетику магнитное поле. Мы знаем, что частота прецессии ω_0 зависит от магнитного поля H . Если частота электромагнитной волны ω подобрана правильно, то при некотором значении магнитного поля частоты совпадают и наступает резонанс: $\omega = \omega_0(H)$.

Но, с другой стороны, частота однородной прецессии магнитного момента ω_0 с точностью до постоян-

ной Планка есть энергия покоящегося магнона ϵ_0 . Это обстоятельство заставляет «посмотреть» на ферромагнитный резонанс с квантовой точки зрения. Условие резонанса после умножения на постоянную Планка приобретает вид равенства энергии фотона $\hbar\omega$ энергии покоящегося магнона

$$\hbar\omega = \epsilon_0, \quad (4.14)$$

и означает, что при резонансе фотон превращается в магнон:

$$\text{фотон} \rightarrow \text{магнон}.$$

Ясно, что при этом должны соблюдаться законы сохранения энергии и импульса. Закон сохранения энергии записан (см. (4.14)). А как обстоит дело с законом сохранения импульса? Ведь у фотона есть импульс, он равен $\hbar\omega/c$. Нужно ли учитывать это обстоятельство? Так как резонансу соответствует превращение фотона в магнон, т. е. уничтожение одной квазичастицы и появление другой, то оба закона сохранения сводятся к равенству энергий магнона и фотона с одним и тем же импульсом: $\epsilon_0 + p^2/2m^* = cp$, где m^* — эффективная масса магнона. Так как $cp = \hbar\omega$, то

$$\epsilon_0 + \frac{(\hbar\omega)^2}{2m^*c^2} = \hbar\omega. \quad (4.15)$$

Получилось какое-то более сложное равенство, чем (4.14). Но прежде чем делать выводы, необходимо оценить возникшее дополнительное слагаемое $(\hbar\omega)^2/2m^*c^2$ по сравнению с ϵ_0 . Предположим, оно очень мало (мы немедленно проверим это предположение). Тогда $\hbar\omega \approx \epsilon_0$. Оценим второе слагаемое в левой части уравнения (4.15): $(\hbar\omega)^2/2m^*c^2 \approx \epsilon_0/2m^*c^2$. Видно, что величина интересующего нас отношения зависит от значения параметра $v_0 = (\epsilon_0/2m^*)^{1/2}$, имеющего размерность скорости (скорость света нам известна). Для оценки v_0 надо оценить эффективную массу магнона m^* (см. стр. 142). Считая, что $a \approx 3 \cdot 10^{-8}$ см, а $A = kT_c$ ($k \approx 1,4 \cdot 10^{-16}$ эрг/град),

*) Зависимость энергии фотона $\epsilon = \hbar\omega$ от импульса есть $\epsilon = cp$, где c — скорость света. Действительно, $\omega = 2\pi c/\lambda$ (λ — длина волны); умножая на \hbar , получим выписанное равенство, так как $2\pi\hbar/\lambda = p$ согласно соотношениям де-Бройля,

имеем

$$m^* \approx \frac{\hbar}{Aa^2} \approx m_e \frac{10^2}{T_c \text{ К}}. \quad (4.16)$$

В эту формулу масса электрона $m_e \approx 10^{-27}$ введена для удобства оценок. Видно, что если $T_c \approx 10^2$ К, то магنون имеет эффективную массу, близкую к массе электрона.

Скорость v_0 существенно зависит от величины ϵ_0 . Пусть к ферромагнетику приложено большое поле *) $H = 10^4$ Э; тогда $\epsilon_0 = 2\mu H$. Но согласно оценке (2.7) такому полю соответствует энергия kT при $T = 1$ К. Отсюда $\epsilon_0 \approx 10^{-16}$ эрг и $v_0 \approx 3 \cdot 10^5$ см/с при $T_c \approx 10^2$ К. Казалось бы, скорость большая, но по сравнению со скоростью света она ничтожна: $v_0^2/c^2 \approx 10^{-10}$. Ясно, что второе слагаемое в равенстве (4.15) можно опустить — учитывать импульс фотона нет нужды. «А второй корень уравнения (4.15)?» — слышим мы вопрос внимательного читателя. Его учитывать не надо, так как выражение для энергии магнона, которым мы воспользовались, справедливо только при малых импульсах (ситуация разъяснена на рис. 68).

Мы так подробно остановились на взаимодействии магнона с фотоном, чтобы сделать несколько общих замечаний:

— квазичастицы, существующие в кристаллах, как правило, движутся сравнительно медленно, их скорость значительно меньше скорости света;

— ферромагнитный резонанс — не уникальный случай превращения фотона в квазичастицу; в антиферромагнетиках возможен антиферромагнитный резонанс —

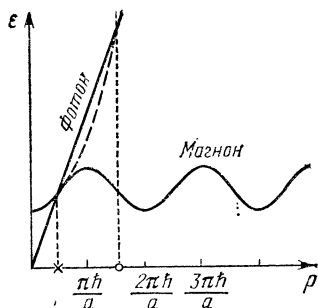


Рис. 68. Графическое решение уравнения $\epsilon(p) = \epsilon_0$. Корень отмечен крестиком. При истинной зависимости энергии магнона ϵ от импульса p второго корня нет. Он появляется, если заменить истинную зависимость энергии магнона от импульса квадратичной.

*) В таком большом поле роль энергии анизотропии, как правило, не существенна,

превращение фотона в антиферромагнетон *); во многих кристаллах возможно превращение фотона в оптический фонон **) и т. п.

— малость скорости квазичастиц v по сравнению со скоростью света ($v \ll c$) приводит к тому, что фотон всегда превращается в «покоящуюся» квазичастицу (и то это превращение возможно, если энергия квазичастицы отлична от нуля).

Итак, ферромагнитный (или антиферромагнитный) резонанс позволяет увидеть отдельный магнетон, но, к сожалению, только покоящийся (при $p = 0$). Правда, полученная при исследовании резонанса информация не ограничивается его фиксацией, т. е. измерением энергии магнетона с нулевым импульсом. Так как наблюдение резонанса означает измерение того значения магнитного поля, при котором резонанс наступает, то это дает возможность установить зависимость частоты однородной прецессии от магнитного поля (определить γ , выяснить роль энергии анизотропии и т. п.). Кроме того, и это, пожалуй, важнее всего, исследование резонансной кривой (рис. 67) позволяет оценить *время жизни магнетона* τ . Как показывает рис. 67, поглощение энергии (превращение фотон \rightarrow магнетон) возможно не только при строгом равенстве частот, но в некотором интервале $\Delta\omega_0 = \gamma\Delta H$, будто энергия магнетона задана не слишком точно: у одних магнетонов одна, у других несколько иная (энергию фотона для простоты считаем строго определенной). Это же можно сказать, используя «квантовую терминологию» (см. стр. 25—27), — *энергия магнетона не имеет определенного значения*. Квантовая механика утверждает, что энергия состояния имеет определенное значение только, если оно *стационарно* — существует бесконечно долго. Если же состояние нестационарно, то существует соотношение, похожее на соотношение неопределенностей

$$\Delta\varepsilon \cdot \tau \gtrsim \hbar \quad \text{или} \quad \tau \Delta\omega \gtrsim 1, \quad (4.17)$$

*) *Задача*. Найти условие антиферромагнитного резонанса для двухподрешеточного антиферромагнетика типа «легкая ось» в трех его конфигурациях. Может ли быть резонанс в антипараллельной конфигурации?

**) Оптические фононы — квазичастицы, соответствующие таким волнам в сложных кристаллах, при которых атомы, принадлежащие одной элементарной ячейке, колеблются относительно друг друга.

где $\Delta\varepsilon$ — неопределенность энергии состояния, τ — *его среднее время жизни* (существования).

Почему же магنون не живет вечно? Что ограничивает его время жизни? Кое-что мы об этом говорили в § 7, гл. 3: магноты сталкиваются с другими магнотами. Кроме того, они могут сталкиваться с фононами, которые всегда есть в кристаллах. Считая магنون частицей (опуская приставку «квази»), легко представить себе, что он рассеивается при столкновениях со всякими нарушениями, практически всегда имеющимися в кристаллах: с чужеродными атомами, с границами кристаллитов, с дислокациями (так называют края оборванных атомных плоскостей), попросту с границами образца. Как видим, причин, укорачивающих жизнь магнотов, много. Всю совокупность их называют *диссипативными процессами* (dissipate — по-латыни рассеивать). Итак,

ферромагнитный резонанс — метод изучения диссипативных процессов с участием магнотов.

Ферроакустический резонанс

Желание с помощью резонансных методов «увидеть» отдельные магноты наводит на мысль выбрать волны, «движущиеся» медленнее электромагнитных. В нашем распоряжении такие волны есть. Это — звуковые волны, скорость которых в сотни тысяч раз меньше скорости света. Нельзя «увидеть», попробуем «услышать».

В результате резонансного взаимодействия фонон может превратиться в магنون. Уравнение, описывающее законы сохранения энергии и импульса, при этом превращении будет отличаться от уравнения (4.15) только заменой скорости света c на скорость звука $c_{зв}$. Так как $c_{зв} \approx 10^5$ см/с, то это радикально меняет ситуацию. Будем для простоты считать, что $\varepsilon_0 = 2\mu H$ (например, энергия анизотропии аномально мала) и будем искать то значение магнитного поля, при котором возможно резонансное взаимодействие (резонансное поле):

$$2\mu H = \hbar\omega - \frac{(\hbar\omega)^2}{2m^*c_{зв}^2}. \quad (4.18)$$

Правая часть, как функция $\hbar\omega$, имеет максимум при $\hbar\omega = m^*c_{зв}^2$ и обращается в нуль при $\hbar\omega = 2m^*c_{зв}^2$

(рис. 69). Ясно (особенно отчетливо из рисунка), что резонанс возможен, если $2\mu H < 1/2 m^* c_{зв}^2$ ($m^* c_{зв}^2/2$ — значение правой части (4.18) в максимуме) при $\hbar\omega < 2m^* c_{зв}^2$. Если частота звука и магнитное поле таковы, что резо-

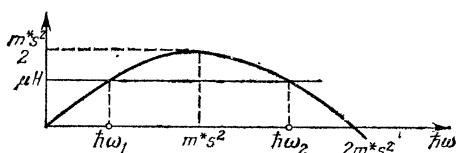


Рис. 69. Графическое решение уравнения (4.18); ω_1 и ω_2 — резонансные частоты при $2\mu H < m^* c_{зв}^2/2$.

нансное поле существенно зависит от второго слагаемого в (4.18) то, пользуясь условием резонанса, можно измерить эффективную массу магнона m^* («услышать» движущийся магнон).

Неупругое рассеяние

В обоих методах, описанных выше, «агент-исследователь» (фотон или фонон) гибнет, своей гибелью свидетельствуя о резонансе. Не существует ли более «мирных» методов получения сведений о квазичастице? Существуют. Они основаны на неупругом рассеянии нейтронов или фотонов. *Неупругим* рассеяние называется в том случае, если при взаимодействии с рассеивателем частица изменяет свою энергию.

Рассмотрим еще раз рассеяние нейтронов ферро- или антиферромагнетиком (см. § 1 этой главы). У нейтрона есть много возможностей изменить свою энергию. Каждая характеризуется своей вероятностью. Есть и вероятность того, что нейтрон вовсе не изменит энергию. Мы знаем, что рассеяние без изменения энергии (неупругое рассеяние) дает в надлежащих условиях сведения о магнитной структуре кристалла.

Существует конечная вероятность того, что нейтрон, пролетая через ферро- или антиферромагнетик, излучит (поглотит) спиновую волну или, на корпускулярном языке, родит (поглотит) магнон. Расчет вероятностей различных процессов рассеяния — непростая задача квантовой механики (мы не будем приводить соответствующие формулы даже без вывода). Но мы можем выяснить *принципиальную* возможность рождения или погло-

щения магнона нейтроном, справедливо считая, что если законы сохранения разрешают процесс, то он произойдет. Итак, при рождении или поглощении нейтроном магнона должны выполняться законы сохранения энергии и импульса. Обозначим импульс нейтрона до и после

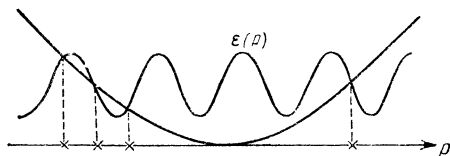


Рис. 70. Графическое решение уравнения (4.19). По оси абсцисс откладывается импульс магнона вдоль «хорошего» направления. Корни уравнения отмечены крестиком.

рассеяния через p_n и p'_n . Энергия нейтрона $\varepsilon_n = p_n^2/2m_n$. Импульс и энергия магнона: p и $\varepsilon(p)$. Тогда

$$\frac{p_n^2}{2m_n} \pm \varepsilon(p) = \frac{p_n'^2}{2m_n}, \quad p'_n = p_n \pm p.$$

Оба закона сохранения можно записать в виде одного уравнения, правда, содержащего векторы (для определенности мы выбрали поглощение магнона):

$$\frac{p_n^2}{2m_n} + \varepsilon(p) = \frac{(p_n + p)^2}{2m_n}. \quad (4.19)$$

Мы хотим выяснить, имеет ли это уравнение решение. Если имеет, то процесс разрешен. То, что решения существуют (их, как правило, несколько), проще всего выяснить из рис. 70. Но если решения существуют, то этот метод дает непосредственную возможность измерения зависимости энергии магнона от его квазиимпульса. Для этого надо независимо измерить изменение импульса нейтрона (оно равно квазиимпульсу магнона p) и изменение энергии нейтрона (оно равно энергии магнона $\varepsilon(p)$). Есть много остроумных методов реализации этой идеи. Основные сведения о магнонах ферро-, ферри- и антиферромагнетиков получены именно благодаря исследованию неупругого рассеяния нейтронов в них.

В последние годы в исследования магнонов включились оптики. Синтезированы прозрачные магнетики. Широкое применение в физическом эксперименте лазеров — источников когерентного света позволило исследовать

неупругое рассеяние фотонов такими магнетиками. Рождение или поглощение магнона сопровождается изменением частоты фотона (ведь энергия фотона пропорциональна его частоте). Этот эффект можно увидеть по изменению цвета светового луча.

Сведения о магнетиках, которые можно почерпнуть из экспериментов по неупругому рассеянию, не исчерпываются зависимостью энергии магнонов от их квазиимпульса. Как и при резонансных исследованиях, удастся выяснить много интересных подробностей о диссипативных процессах с участием магнонов.

* * *

Рассказывая об активно живущей области науки, очень трудно поставить точку. Вроде как оборвать разговор на полуслове. Успокаивает то, что мы ставили перед собой вполне определенную задачу — рассказать о *природе магнитных явлений* и, надеемся, эту задачу решили. О магнитных явлениях можно рассказывать и рассказывать. Вероятно, читатель понял, что магнитные свойства тел неразрывно связаны с их микроскопическим строением и могут быть поняты только при ясном понимании структуры, состава тел, сил, действующих между атомами, молекулами и ионами. Иногда (но отнюдь не всегда) магнитные свойства как бы изолируются: их можно рассматривать, не задумываясь о строении микроскопических частиц. Так появляется модель газа магнитных стрелок со всеми вытекающими из нее последствиями. Зная микроскопические частицы и их свойства, отнюдь не просто «сложить» макроскопическую картину. Нам много раз приходилось обращаться к статистической физике. Может быть, те страницы, где мы оперируем понятиями статистической физики, наиболее трудны для понимания и наименее наглядны.

Понимая это, мы пытались помочь читателю разъяснениями. Не знаем, как нам это удалось.

И на прощанье последнее замечание: разговаривая с читателями, мы старались объяснить только то, что могли объяснить, имея в распоряжении ограниченные средства. Не каждый раз мы подчеркивали это обстоятельство. Мы хотели бы, чтобы наша книга пробудила желание узнать, как объясняются факты и свойства, понимание которых требует более глубоких знаний, т. е. пробудило бы желание эти знания получить.

БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ:

- Вып. 1. М. П. Бронштейн. Атомы и электроны.
Вып. 2. М. Фарадей. История свечи.
Вып. 3. О. Оре. Приглашение в теорию чисел.
Вып. 4. Опыты в домашней лаборатории.
Вып. 5. И. Ш. Слободецкий, Л. Г. Асламазов. Задачи по физике.
Вып. 6. Л. П. Мочалов. Головоломки.
Вып. 7. П. С. Александров. Введение в теорию групп.
Вып. 8. Г. Штейнгауз. Математический калейдоскоп.
Вып. 9. Замечательные ученые.
Вып. 10. В. М. Глушков, В. Я. Валах. Что такое ОГАС!
Вып. 11. Г. И. Копылов. Всего лишь кинематика.
Вып. 12. Я. А. Смородинский. Температура.
Вып. 13. А. Е. Карпов, Е. Я. Гик. Шахматный калейдоскоп.
Вып. 14. С. Г. Гиндикин. Рассказы о физиках и математиках.
Вып. 15. А. А. Боровой. Как регистрируют частицы.
Вып. 16. М. И. Каганов, В. М. Цукерник. Природа магнетизма.